

# 22

## LEY DE GAUSS

La ley de Gauss es otra forma de describir el comportamiento de las cargas y los campos eléctricos. Una consecuencia de esta ley es que las cargas estáticas de un conductor se encuentran en la superficie de éste, no en su interior. Es por ello que esta niña adquiere una carga eléctrica al tocar la esfera metálica con carga. Los cabellos con carga de la cabeza de la niña se repelen y se erizan.

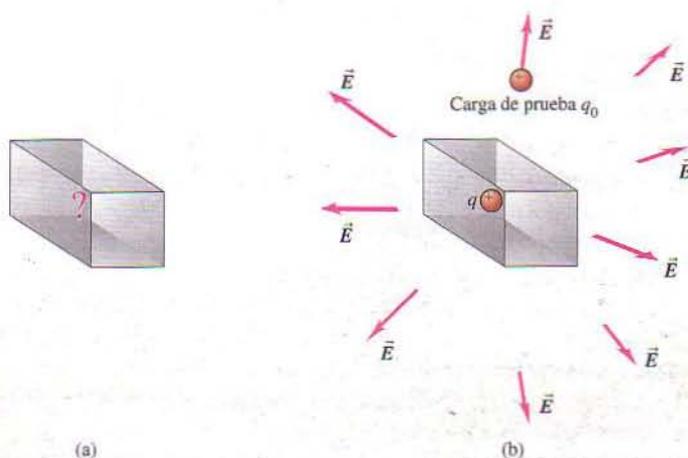
? Si la niña se pone de pie dentro de una esfera metálica grande con carga, ¿se le erizará el cabello?



Suele haber una manera fácil y una forma difícil de realizar una tarea; la manera fácil puede consistir simplemente en utilizar las herramientas apropiadas. En física, una herramienta importante para simplificar los problemas es el uso de las *propiedades de simetría* de los sistemas. Muchos sistemas físicos tienen simetría; por ejemplo, un cuerpo cilíndrico no se ve diferente después de hacerlo girar en torno a su eje, y una esfera metálica con carga se ve idéntica después de darle vuelta en torno a cualquier eje que pase por su centro.

La ley de Gauss es parte de la clave para simplificar los cálculos de campos eléctricos con base en consideraciones de simetría. Por ejemplo, el campo de una distribución de carga en línea recta o en una lámina plana, que se dedujo en la sección 21.5 mediante algunas integraciones bastante laboriosas, se obtiene en unos pocos renglones con ayuda de la ley de Gauss. Pero la ley de Gauss es algo más que un simple recurso para facilitar ciertos cálculos. De hecho, es un enunciado fundamental acerca de la relación entre las cargas eléctricas y los campos eléctricos. Entre otras cosas, la ley de Gauss nos ayuda a entender cómo se distribuye la carga eléctrica en los cuerpos conductores.

La ley de Gauss se refiere a lo siguiente. Dada una distribución de carga cualquiera, la envolvemos en una superficie imaginaria que encierra la carga. A continuación, examinamos el campo eléctrico en diversos puntos de esta superficie imaginaria. La ley de Gauss es la relación entre el campo en *todos* los puntos de la superficie y la carga total encerrada dentro de la superficie. Esto quizá suene como



**22.1** (a) Caja que contiene una cantidad desconocida de carga. (b) Se puede investigar la carga del interior de la caja mediante una carga de prueba  $q_0$  para medir el campo eléctrico afuera de la caja.

una manera más bien indirecta de expresar las cosas, pero resulta ser una relación enormemente útil. Más allá de su uso como herramienta de cómputo, la ley de Gauss permite profundizar en la comprensión de los campos eléctricos. Haremos uso repetido de esta comprensión en varios de los capítulos que siguen a medida que prosigamos nuestro estudio del electromagnetismo.

## 22.1 | Carga y flujo eléctrico

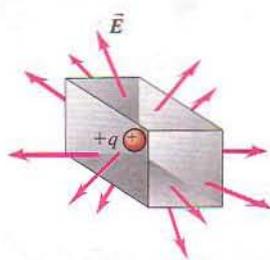
En el capítulo 21 planteamos la pregunta siguiente: “Dada una distribución de carga, ¿cuál es el campo eléctrico que produce esa distribución en un punto  $P$ ?” Vimos que se podía hallar la respuesta representando la distribución como un conjunto de cargas puntuales, cada una de las cuales produce un campo eléctrico  $\vec{E}$  dado por la ecuación (21.7). El campo total en  $P$  es entonces la suma vectorial de los campos debidos a todas las cargas puntuales.

Pero existe otra relación entre las distribuciones de carga y los campos eléctricos. A fin de descubrir esta relación, planteemos al revés la pregunta del capítulo 21: “Si se conoce la disposición del campo eléctrico en una región determinada, ¿qué se puede saber acerca de la distribución de carga en esa región?”

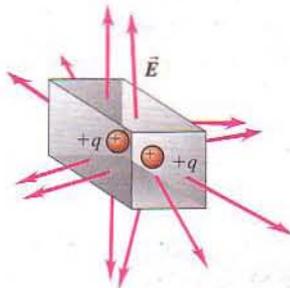
He aquí un ejemplo. Considérese la caja que se muestra en la figura 22.1a, que puede o no contener carga eléctrica. Suponemos que la caja es de un material que no influye en ninguno de los campos eléctricos; es de la misma clase que la cuerda sin masa, la pendiente sin fricción y la educación universitaria gratuita. Mejor aún, hagamos que la caja represente una superficie *imaginaria* que puede encerrar o no cierta carga. Nos referiremos a la caja como una **superficie cerrada** porque encierra totalmente un volumen. ¿Cómo se puede saber cuánta carga, en su caso, hay dentro de la caja?

Como sabemos que una distribución de carga produce un campo eléctrico y que un campo eléctrico ejerce una fuerza sobre una carga de prueba, movemos una carga de prueba  $q_0$  en torno a las proximidades de la caja. Luego de medir la fuerza  $\vec{F}$  que la carga de prueba experimenta en distintas posiciones, elaboramos un mapa tridimensional del campo eléctrico  $\vec{E} = \vec{F}/q_0$  afuera de la caja. En el caso que se muestra en la figura 22.1b, el mapa resulta ser igual al del campo eléctrico

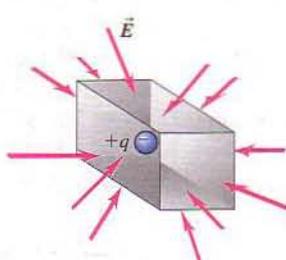
La exposición de la ley de Gauss que se presenta en esta sección se basa y se inspira en las innovadoras ideas de Ruth W. Chabay y Bruce A. Sherwood (*Electric and Magnetic Interactions*, John Wiley & Sons, 1994).



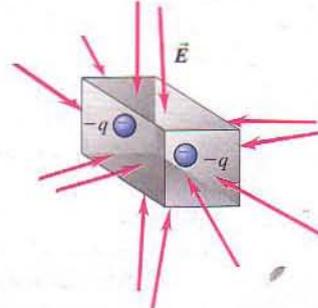
(a) Carga positiva adentro de la caja, flujo saliente



(b) Carga positiva adentro de la caja, flujo saliente



(c) Carga negativa adentro de la caja, flujo entrante



(d) Carga negativa adentro de la caja, flujo entrante

**22.2** Campo eléctrico en la superficie de cajas que contienen (a) una sola carga puntual positiva, (b) dos cargas puntuales positivas, (c) una sola carga puntual negativa o (d) dos cargas puntuales negativas.

que produce una carga puntual positiva (Fig. 21.26a). Con base en los detalles del mapa, podemos hallar el valor exacto de la carga puntual en el interior de la caja.

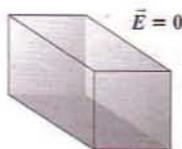
Para conocer el contenido de la caja, es necesario medir  $\vec{E}$  sólo en la *superficie* de la caja. En la figura 22.2a hay una sola carga puntual positiva dentro de la caja, y en la figura 22.2b hay dos cargas de este tipo. Las disposiciones del campo sobre la superficie de las cajas son diferentes en detalle, pero en ambos casos el campo eléctrico apunta hacia afuera de la caja. Las figuras 22.2c y 22.2d muestran casos con una y dos cargas puntuales negativas, respectivamente, dentro de la caja. Una vez más, los detalles de  $\vec{E}$  en la superficie de la caja son diferentes, pero en ambos casos el campo apunta hacia el interior de la caja.

En la sección 21.4 mencionamos la analogía entre los vectores de campo eléctrico y los vectores de velocidad de un fluido en movimiento. Esta analogía puede ser útil, pese a que un campo eléctrico no “fluye” en realidad. Con base en esta analogía, decimos que en las figuras 22.2a y 22.2b, donde los vectores de campo eléctrico apuntan hacia afuera de la superficie, hay un **flujo eléctrico saliente**. En las figuras 22.2c y 22.2d los vectores  $\vec{E}$  apuntan hacia el interior de la superficie y el flujo eléctrico es *entrante*.

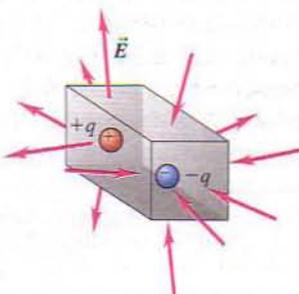
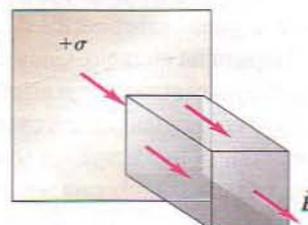
La figura 22.2 sugiere una relación simple: la carga positiva que está dentro de la caja atraviesa con un flujo eléctrico saliente la superficie de la caja, y la carga negativa del interior lo hace con un flujo eléctrico entrante. ¿Qué ocurre si la carga en el interior de la caja es *cero*? En la figura 22.3a la caja está vacía y  $\vec{E} = 0$  en todas partes, por lo que no hay flujo eléctrico hacia adentro ni hacia afuera de la

Activ  
ONLINE  
Physics

## 11.7 Flujo eléctrico



(a) No hay carga adentro de la caja, flujo cero

(b) Carga *net*a cero adentro de la caja, el flujo entrante cancela el flujo saliente

(c) No hay carga adentro de la caja, porque el flujo entrante cancela al flujo saliente

**22.3** Tres casos en los que la carga *net*a en el interior de una caja es cero y no hay un flujo eléctrico neto a través de la superficie de la caja. (a) Caja vacía con  $\vec{E} = 0$ . (b) Caja que contiene una carga puntual positiva y una carga puntual negativa de igual magnitud. (c) Caja vacía inmersa en un campo eléctrico uniforme.

caja. En la figura 22.3b hay una carga puntual positiva y una carga puntual negativa de igual magnitud encerradas en la caja; por tanto, la carga *neto* en el interior de la caja es cero. Hay un campo eléctrico, pero “fluye hacia adentro” de la caja en la mitad de su superficie y “fluye hacia afuera” de la caja en la otra mitad. Por consiguiente, no hay un flujo eléctrico *neto* hacia adentro o hacia afuera de la caja.

La caja está vacía una vez más en la figura 22.3c. Sin embargo, hay carga *afuera* de la caja; la caja ha sido colocada con un extremo paralelo a una lámina infinita con carga uniforme, la cual produce un campo eléctrico uniforme perpendicular a la lámina (como vimos en el ejemplo 21.12 de la sección 21.5). En un extremo de la caja,  $\vec{E}$  apunta hacia el interior de la caja; en el extremo opuesto,  $\vec{E}$  apunta hacia afuera de la caja; y en los costados,  $\vec{E}$  es paralelo a la superficie y, por tanto, no apunta ni hacia adentro ni hacia afuera de la caja. Al igual que en la figura 22.3b, el flujo eléctrico entrante en una parte de la caja compensa exactamente el flujo eléctrico saliente en la otra parte. Así pues, en todos los casos que se muestran en la figura 22.3 no hay un flujo eléctrico *neto* a través de la superficie de la caja, y no hay una carga *neto* encerrada en la caja.

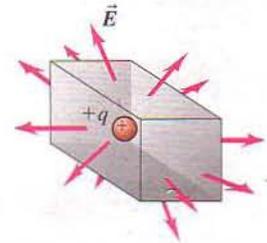
Las figuras 22.2 y 22.3 ponen de manifiesto una vinculación entre el *signo* (positivo, negativo o cero) de la carga *neto* encerrada por una superficie cerrada y el sentido (saliente, entrante o ninguno) del flujo eléctrico neto a través de la superficie. También hay una vinculación entre la *magnitud* de la carga neta adentro de la superficie cerrada y la *intensidad* del “flujo” neto de  $\vec{E}$  en toda la superficie. En las figuras 22.4a y 22.4c hay una sola carga puntual adentro de la caja, pero en la figura 22.4b la magnitud de la carga es dos veces la anterior; por tanto, en todas partes  $\vec{E}$  tiene una magnitud dos veces la de la figura 22.4a. Teniendo en mente la analogía con el flujo de fluidos, esto significa que el flujo eléctrico saliente neto también es dos veces mayor en la figura 22.4b que en la figura 22.4a. Esto sugiere que el flujo eléctrico neto a través de la superficie de la caja es *directamente proporcional* a la magnitud de la carga neta que encierra la caja.

Esta conclusión es independiente del tamaño de la caja. En la figura 22.4c la carga puntual  $+q$  está encerrada en una caja con dimensiones lineales del doble que las de la caja de la figura 22.4a. Pero cada cara de la caja grande tiene exactamente cuatro veces el área que la cara correspondiente de la caja pequeña. Por tanto, el flujo eléctrico saliente es *igual* en las dos cajas si se *define* el flujo eléctrico como sigue: con respecto a cada cara de la caja, tómesese el producto de la componente perpendicular media de  $\vec{E}$  por el área de esa cara; luego, súmense los resultados de todas las caras de la caja. Con esta definición el flujo eléctrico neto debido a una sola carga puntual encerrada en la caja es independiente del tamaño de ésta, y depende sólo de la carga neta presente dentro de la caja.

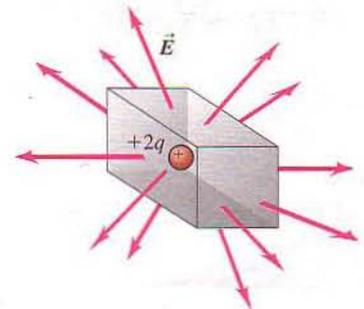
Hemos visto que hay una relación entre la cantidad de carga neta en el interior de una superficie cerrada y el flujo eléctrico a través de esa superficie. Con respecto a los casos especiales de una superficie cerrada con forma de caja rectangular y distribuciones de carga compuestas de cargas puntuales o láminas infinitas con carga, hemos hallado que:

1. El hecho de que haya o no un flujo eléctrico saliente o entrante neto a través de una superficie cerrada depende del signo de la carga encerrada.
2. Las cargas que están *afuera* de la superficie no proporcionan un flujo eléctrico neto a través de la superficie.
3. El flujo eléctrico neto es directamente proporcional a la cantidad de carga neta encerrada dentro de su superficie, pero, por lo demás, es independiente del tamaño de la superficie cerrada.

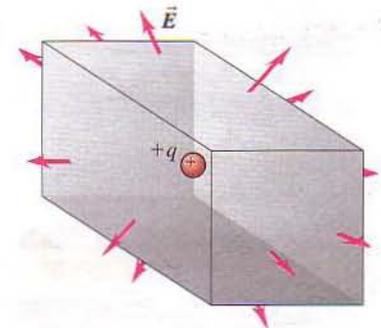
Estas observaciones son una expresión cualitativa de la *ley de Gauss*.



(a) Carga positiva adentro de la caja, flujo saliente



(b) La misma caja de (a), el doble de carga positiva: el doble de flujo saliente que en (a)



(c) Caja con dimensiones dos veces mayores que en (a), misma carga positiva: mismo flujo saliente que en (a)

**22.4** (a) Caja que encierra una carga puntual positiva  $+q$ . (b) Al duplicar la carga se duplica la magnitud de  $\vec{E}$  y también el flujo eléctrico a través de la superficie. (c) Si la carga no cambia pero se duplican las dimensiones de la caja, el flujo permanece sin cambio. La magnitud de  $\vec{E}$  en la superficie disminuye por un factor de  $\frac{1}{4}$ , pero el área a través de la cual “fluye”  $\vec{E}$  aumenta por un factor de 4.

¿Son válidas estas observaciones con respecto a otras distribuciones de carga y a superficies cerradas de forma arbitraria? La respuesta a esta pregunta resultará ser afirmativa. Sin embargo, para explicar por qué, es necesario contar con una expresión matemática precisa de lo que significa el concepto de flujo eléctrico, la cual se deducirá en la sección siguiente.

### Evalúe su comprensión

Si se aumentan todas las dimensiones de la caja de la figura 22.2a por un factor de tres, ¿qué efecto tendrá este cambio en el flujo eléctrico a través de la caja?

## 22.2 | Cálculo del flujo eléctrico

En la sección anterior presentamos el concepto de *flujo eléctrico*. En términos cualitativos, el flujo eléctrico a través de una superficie es una descripción de si el campo eléctrico  $\vec{E}$  apunta hacia adentro o hacia afuera de la superficie. Nos servimos de esto para proporcionar una expresión cualitativa burda de la ley de Gauss: el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada es directamente proporcional a la carga neta en el interior de esa superficie. A fin de poder aprovechar plenamente esta ley, es necesario saber cómo *calcular* el flujo eléctrico. Para ello, utilicemos de nuevo la analogía entre un campo eléctrico  $\vec{E}$  y el campo de vectores de velocidad  $\vec{v}$  de un fluido en circulación. (Una vez más, no hay que olvidar que se trata sólo de una analogía; un campo eléctrico *no* es un flujo).

La figura 22.5 muestra un fluido que fluye de modo uniforme de izquierda a derecha. Examinemos la relación de flujo volumétrico  $dV/dt$  (por ejemplo, en metros cúbicos en cada segundo) a través del rectángulo de alambre de área  $A$ . Cuando el área es perpendicular a la velocidad de flujo  $\vec{v}$  (Fig. 22.5a) y la velocidad de flujo es la misma en todos los puntos del fluido, la relación de flujo volumétrico  $dV/dt$  es el área  $A$  multiplicada por la rapidez de flujo  $v$ :

$$\frac{dV}{dt} = vA$$

Cuando se inclina el rectángulo un ángulo  $\phi$  (Fig. 22.5b) de modo que su cara no sea perpendicular a  $\vec{v}$ , el área que se considera es el área de la silueta que vemos cuando enfrentamos la dirección de  $\vec{v}$ . Esta área, que está dibujada en rojo y marcada como  $A_{\perp}$  en la figura 22.5b, es la *proyección* del área  $A$  sobre una superficie perpendicular a  $\vec{v}$ . Dos lados del rectángulo proyectado tienen la misma longitud que el original, pero los otros dos se han acortado por un factor  $\cos \phi$ ; por tanto, el área proyectada  $A_{\perp}$  es igual a  $A \cos \phi$ . En estas condiciones la relación de flujo volumétrico a través de  $A$  es

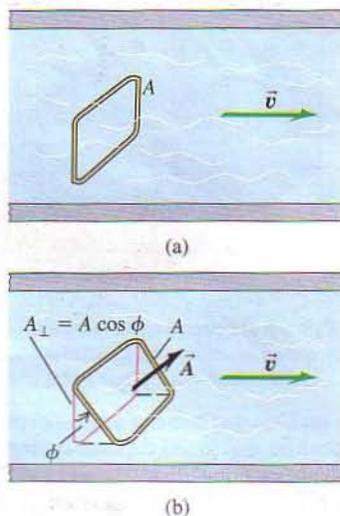
$$\frac{dV}{dt} = vA \cos \phi$$

Si  $\phi = 90^\circ$ ,  $dV/dt = 0$ ; el rectángulo de alambre presenta su borde al flujo, y no pasa fluido alguno a través del rectángulo.

Asimismo,  $v \cos \phi$  es la componente del vector  $\vec{v}$  perpendicular al plano del área  $A$ . Si llamamos  $v_{\perp}$  a esta componente, podemos escribir de nuevo la relación de flujo volumétrico como

$$\frac{dV}{dt} = v_{\perp}A$$

La relación de flujo volumétrico se puede expresar de manera más compacta empleando el concepto de vector área,  $\vec{A}$ , una magnitud vectorial de magnitud  $A$  y dirección perpendicular al plano del área que se describe. El vector área  $\vec{A}$  describe tanto el tamaño de un área como su orientación en el espacio. En términos de



**22.5** La relación de flujo volumétrico de fluido a través del rectángulo de alambre (a) es  $vA$  cuando el área del rectángulo es perpendicular a  $\vec{v}$  y (b) es  $vA \cos \phi$  cuando el rectángulo está inclinado un ángulo  $\phi$ .

$\vec{A}$ , podemos escribir la relación de flujo volumétrico de fluido a través del rectángulo de la figura 22.5b como un producto escalar (punto):

$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Con base en la analogía entre el campo eléctrico y el flujo de fluidos, definimos ahora el flujo eléctrico del mismo modo que hemos definido la relación de flujo volumétrico de un fluido: simplemente sustituimos la velocidad del fluido  $\vec{v}$  por el campo eléctrico  $\vec{E}$ . El símbolo con el que se representa el flujo eléctrico es  $\Phi_E$  (la letra griega mayúscula “phi”; el subíndice  $E$  es un recordatorio de que se trata de un flujo eléctrico). Considérese en primer término un área plana  $A$  perpendicular a un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  (Fig. 22.6a). Se define el flujo eléctrico a través de esta área como el producto de la magnitud del campo  $E$  por el área  $A$ :

$$\Phi_E = EA$$

De forma aproximada, podemos describir  $\Phi_E$  en términos de las líneas de campo que pasan a través de  $A$ . Aumentar el área significa que más líneas de  $\vec{E}$  atraviesan el área, con lo cual el flujo aumenta; un campo más intenso significa líneas de  $\vec{E}$  más próximas unas a otras y, por tanto, más líneas en cada unidad de área, de modo que, una vez más, el flujo aumenta.

Si el área  $A$  es plana pero no perpendicular al campo  $\vec{E}$ , entonces la atraviesan menos líneas. En este caso el área que considera es el área de la silueta que vemos al enfrentar la dirección de  $\vec{E}$ . Ésta es el área  $A_\perp$  de la figura 22.6b y es igual a  $A \cos \phi$  (compárese con la Fig. 22.5b). Generalizaremos nuestra definición de flujo eléctrico de un campo eléctrico uniforme como

$$\Phi_E = EA \cos \phi \quad (\text{flujo eléctrico para un } \vec{E}, \text{ uniforme en una superficie plana}) \quad (22.1)$$

Puesto que  $E \cos \phi$  es la componente de  $\vec{E}$  perpendicular al área, podemos escribir de nuevo la ecuación (22.1) como

$$\Phi_E = E_\perp A \quad (\text{flujo eléctrico para un } \vec{E}, \text{ uniforme en una superficie plana}) \quad (22.2)$$

En términos del vector área  $\vec{A}$  perpendicular al área, se puede escribir el flujo eléctrico como el producto escalar de  $\vec{E}$  por  $\vec{A}$ :

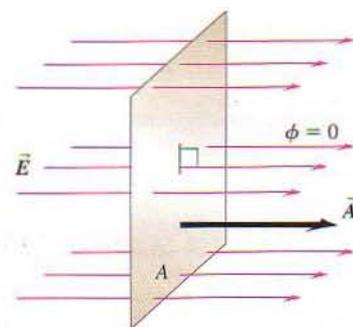
$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad (\text{flujo eléctrico de } \vec{E}, \text{ uniforme en una superficie plana}) \quad (22.3)$$

Las ecuaciones (22.1), (22.2) y (22.3) expresan de modos diferentes, aunque equivalentes, el flujo eléctrico correspondiente a una superficie plana y a un campo eléctrico uniforme. La unidad SI de flujo eléctrico es  $1 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ . Dése cuenta que si el área está de canto contra el campo,  $\vec{E}$  y  $\vec{A}$  son perpendiculares y el flujo es cero (Fig. 22.6c).

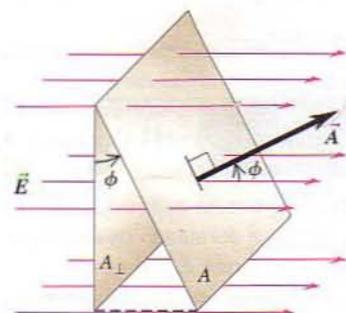
Podemos representar la dirección de un vector área  $\vec{A}$  mediante un *vector unitario*  $\hat{n}$  perpendicular al área;  $\vec{A}$  perpendicular al área;  $\hat{n}$  significa “normal”. Entonces

$$\vec{A} = A\hat{n} \quad (22.4)$$

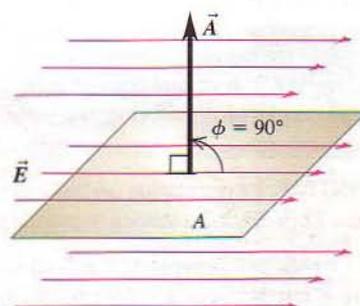
Una superficie tiene dos lados; por tanto, son dos las direcciones posibles de  $\hat{n}$  y de  $\vec{A}$ . Siempre se debe especificar la dirección elegida. En la sección 22.1 relacionamos la carga dentro de una superficie cerrada con el flujo eléctrico a través de la superficie. Con una superficie cerrada siempre elegiremos la dirección de  $\hat{n}$  como *saliente*, y nos referiremos al flujo *hacia afuera* de una superficie cerrada. Por consiguiente, lo que llamamos “flujo eléctrico hacia afuera” en la sección 22.1 corresponde a un valor positivo de  $\Phi_E$ , y lo que llamamos “flujo eléctrico hacia adentro”, a un valor *negativo* de  $\Phi_E$ .



(a) Superficie de frente al campo eléctrico  $\vec{E}$  y  $\vec{A}$  el ángulo entre  $\vec{E}$  y  $\vec{A}$  es  $\phi = 0$  flujo  $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$



(b) Superficie inclinada respecto a la orientación de cara en un ángulo  $\phi$  el ángulo entre  $\vec{E}$  y  $\vec{A}$  es  $\phi$  flujo  $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$



(c) La superficie presenta su borde al campo eléctrico  $\vec{E}$  y  $\vec{A}$  perpendiculares el ángulo entre  $\vec{E}$  y  $\vec{A}$  es  $\phi = 90^\circ$  flujo  $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90^\circ = 0$

**22.6** Superficie plana en un campo eléctrico uniforme. El flujo eléctrico  $\Phi_E$  a través de la superficie es igual al producto escalar del campo eléctrico  $\vec{E}$  por el área vectorial  $\vec{A}$ .

¿Qué sucede si el campo eléctrico  $\vec{E}$  no es uniforme, sino que varía de un punto a otro en el área  $A$ ? ¿O si  $A$  es parte de una superficie curva? En tales casos se divide  $A$  en muchos elementos pequeños  $dA$ , cada uno de los cuales tiene un vector unitario  $\hat{n}$  perpendicular a él y un vector área  $d\vec{A} = \hat{n} dA$ . Se calcula el flujo eléctrico a través de cada elemento y se integran los resultados para obtener el flujo total:

$$\Phi_E = \int E \cos \phi dA = \int E_{\perp} dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (22.5)$$

(definición general de flujo eléctrico)

A esto se le llama la **integral de superficie** de la componente  $E_{\perp}$  con respecto al área, o integral de superficie de  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ . Las diversas formas de la integral expresan todas lo mismo en términos distintos. En problemas específicos, a veces una forma es más conveniente que otra. El ejemplo 22.3 al final de esta sección ilustra el uso de la ecuación (22.5).

En la ecuación (22.5) el flujo eléctrico  $\int E_{\perp} dA$  es simplemente igual al producto del valor *promedio* de la componente perpendicular del campo eléctrico por el área de la superficie. Ésta es la misma definición de flujo eléctrico a la que llegamos en la sección 22.2, ahora expresada en términos más matemáticos. En la sección siguiente veremos la relación entre el flujo eléctrico total a través de *cualquier* superficie cerrada, cualquiera que sea su forma y la cantidad de carga encerrada dentro de esa superficie.

### Ejemplo 22.1

## Flujo eléctrico a través de un disco

Un disco cuyo radio mide 0.10 m está orientado con su vector unitario normal  $\hat{n}$  formando un ángulo de  $30^\circ$  respecto a un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  cuya magnitud es de  $2.0 \times 10^3$  N/C (Fig. 22.7). (Puesto que esta superficie no es cerrada, no tiene un “adentro” ni un “afuera”. Es por ello que se debe especificar la dirección de  $\hat{n}$  en la figura). a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del disco? b) ¿Cuál es el flujo a través del disco si éste se orienta de modo que su normal sea perpendicular a  $\vec{E}$ ? c) ¿Cuál es el flujo a través del disco si su normal es paralela a  $\vec{E}$ ?

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Este problema se refiere a una superficie plana en un campo eléctrico uniforme; por tanto, podemos aplicar las ideas de esta sección.

**PLANTEAR:** La orientación del disco es como la del rectángulo de la figura 22.6b. El flujo eléctrico se calcula mediante la ecuación (22.1).

**EJECUTAR:** a) El área es  $A = \pi(0.10 \text{ m})^2 = 0.0314 \text{ m}^2$  y el ángulo entre  $\vec{E}$  y  $\vec{A} = A\hat{n}$  es  $\phi = 30^\circ$ ; por tanto,

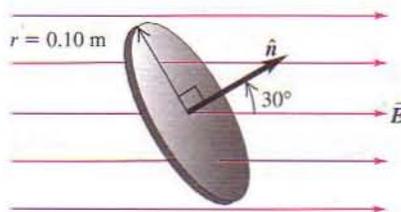
$$\begin{aligned} \Phi_E &= EA \cos \phi = (2.0 \times 10^3 \text{ N/C})(0.0314 \text{ m}^2)(\cos 30^\circ) \\ &= 54 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} \end{aligned}$$

b) La normal al disco es ahora perpendicular a  $\vec{E}$ , por tanto,  $\phi = 90^\circ$ ,  $\cos \phi = 0$  y  $\Phi_E = 0$ . No hay flujo a través del disco.

c) La normal al disco es paralela a  $\vec{E}$ , por tanto,  $\phi = 0$ ,  $\cos \phi = 1$  y el flujo tiene su valor máximo posible. De la ecuación (22.1),

$$\begin{aligned} \Phi_E &= EA \cos \phi = (2.0 \times 10^3 \text{ N/C})(0.0314 \text{ m}^2)(1) \\ &= 63 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} \end{aligned}$$

**EVALUAR:** Como comprobación de los resultados, adviértase que la respuesta al inciso (a) es menor que la respuesta al inciso (c). ¿Es así como debe ser?



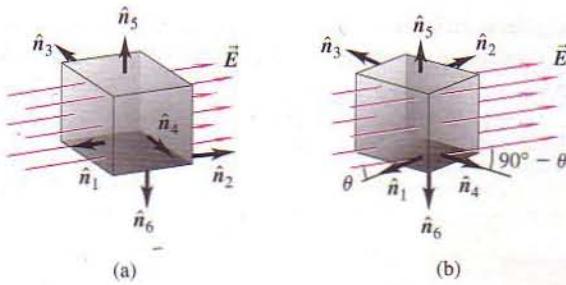
**22.7** El flujo eléctrico a través de un disco depende del ángulo entre su normal  $\hat{n}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$ .

### Ejemplo 22.2

## Flujo eléctrico a través de un cubo

Se coloca un cubo de lado  $L$  en una región de campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ . Halle el flujo eléctrico a través de cada cara del cubo y el flujo total a través del cubo cuando el cubo a) está orientado con

dos de sus caras perpendiculares al campo  $\vec{E}$ , como en la figura 22.8a; b) se hace girar un ángulo  $\theta$ , como en la figura 22.8b.



**22.8** Flujo eléctrico de un campo uniforme  $\vec{E}$  a través de una caja cúbica de lado  $L$  en dos orientaciones.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Puesto que  $\vec{E}$  es uniforme y cada una de las seis caras del cubo es una superficie plana, el flujo a través de cada cara se halla mediante las ecuaciones (22.3) y (22.4). Después se calcula el flujo total a través del cubo sumando los seis flujos individuales.

**EJECUTAR:** a) En la figura se muestran los vectores unitarios de cada cara ( $\hat{n}_1$  a  $\hat{n}_6$ ), la dirección de cada vector unitario es *hacia afuera* desde la superficie cerrada del cubo. El ángulo entre  $\vec{E}$  y  $\hat{n}_1$  es de  $180^\circ$ ; el ángulo entre  $\vec{E}$  y  $\hat{n}_2$  es de  $0^\circ$ ; y el ángulo entre  $\vec{E}$  y cada uno de los otros cuatro vectores unitarios es de  $90^\circ$ . El área de cada cara del cubo es  $L^2$ ; por tanto, los flujos a través de cada una de las caras son

$$\begin{aligned} \Phi_{E1} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_1 A = EL^2 \cos 180^\circ = -EL^2 \\ \Phi_{E2} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_2 A = EL^2 \cos 0^\circ = +EL^2 \\ \Phi_{E3} &= \Phi_{E4} = \Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

El flujo es negativo en la cara 1, donde  $\vec{E}$  está dirigido hacia el cubo, y positivo en la cara 2, donde  $\vec{E}$  se dirige hacia afuera del cubo. El flujo *total* a través del cubo es la suma de los flujos a través de las seis caras:

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6} \\ &= -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

b) Los flujos a través de las caras 1 y 3 son negativos, puesto que  $\vec{E}$  está dirigido hacia esas caras; la dirección del campo es hacia afuera respecto a las caras 2 y 4, de modo que los flujos a través de esas caras son positivos. Se encuentra que

$$\begin{aligned} \Phi_{E1} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_1 A = EL^2 \cos(180^\circ - \theta) = -EL^2 \cos \theta \\ \Phi_{E2} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_2 A = +EL^2 \cos \theta \\ \Phi_{E3} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_3 A = EL^2 \cos(90^\circ + \theta) = -EL^2 \sin \theta \\ \Phi_{E4} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_4 A = EL^2 \cos(90^\circ - \theta) = +EL^2 \sin \theta \\ \Phi_{E5} &= \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

El flujo total  $\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$  a través de la superficie del cubo es nuevamente cero.

**EVALUAR:** No es sorprendente que el flujo total sea cero con ambas orientaciones. Llegamos a esta misma conclusión al analizar la figura 22.3c en la sección 22.1. Ahí observamos que había un flujo neto nulo de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie cerrada que no contiene carga eléctrica.

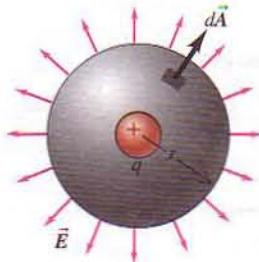
**Ejemplo 22.3**

**Flujo eléctrico a través de una esfera**

Una carga puntual positiva  $q = 3.0 \mu\text{C}$  está rodeada por una esfera centrada en la carga y cuyo radio es de  $0.20 \text{ m}$  (Fig. 22.9). Halle el flujo eléctrico a través de la esfera debido a esta carga.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** En este caso la superficie no es plana y el campo eléctrico no es uniforme; por tanto, se debe aplicar la definición general del flujo eléctrico.



**22.9** Flujo eléctrico a través de una esfera centrada en una carga puntual.

**PLANTEAR:** Se calcula el flujo eléctrico (la variable que se busca) con base en la ecuación (22.5). Dado que la esfera está centrada en la carga puntual, en cualquier punto de la superficie esférica  $\vec{E}$  está dirigido hacia afuera de la esfera, perpendicularmente a la superficie. La dirección positiva tanto de  $\hat{n}$  como de  $E_\perp$  es hacia afuera; por tanto,  $E_\perp = E$  y el flujo a través de un elemento de superficie  $dA$  es  $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$ . Esto simplifica considerablemente la integral de la ecuación (22.5).

**EJECUTAR:** En cualquier punto de la esfera la magnitud de  $\vec{E}$  es:

$$\begin{aligned} E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \frac{3.0 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.20 \text{ m})^2} \\ &= 6.75 \times 10^5 \text{ N/C} \end{aligned}$$

Puesto que  $E$  es igual en todos los puntos, se puede sacar de la integral  $\Phi_E = \int E dA$  de la ecuación (22.5). Lo que resta es la integral  $\int dA$ , que es simplemente el área total  $A = 4\pi r^2$  de la superficie esférica. Por tanto, el flujo total hacia afuera de la esfera es

$$\begin{aligned} \Phi_E &= EA = (6.75 \times 10^5 \text{ N/C})(4\pi)(0.20 \text{ m})^2 \\ &= 3.4 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C} \end{aligned}$$

**EVALUAR:** Dése cuenta que dividimos entre  $r^2 = (0.20 \text{ m})^2$  para hallar  $E$ , y luego multiplicamos por  $r^2 = (0.20 \text{ m})^2$  para hallar  $\Phi_E$ ; por tanto, el radio  $r$  de la esfera se cancela en el resultado de  $\Phi_E$ . Se habría obtenido el mismo flujo con una esfera cuyo radio fuese de 2.0 m o 200 m. En esencia, llegamos a la misma conclusión en nuestro análisis de la figura 22.4 en la sección 22.1, donde consideramos superficies

rectangulares cerradas de dos tamaños distintos que encerraban una carga puntual. En este caso encontramos que el flujo de  $\vec{E}$  era independiente del tamaño de la superficie; este mismo resultado es válido con respecto a una superficie esférica. De hecho, el flujo a través de *cualquier* superficie que encierre una sola carga puntual es independiente de la forma o tamaño de la superficie, como pronto veremos.



**22.10** Estos paneles solares están inclinados de frente al Sol. ¿Qué relación hay entre la inclinación y la definición de flujo eléctrico?

### Evalúe su comprensión

A fin de generar la cantidad máxima de energía eléctrica, los paneles solares se instalan de modo que estén aproximadamente de cara al Sol como sea posible (Fig. 22.10). Explique en qué sentido esta orientación es análoga a la obtención del flujo eléctrico máximo a través de una superficie plana.

## 22.3 | Ley de Gauss

La **ley de Gauss** es una alternativa de la ley de Coulomb. Aunque es totalmente equivalente a la ley de Coulomb, la ley de Gauss ofrece una manera diferente de expresar la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. Fue formulada por Carl Friedrich Gauss (1777–1855), uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos. Muchos campos de las matemáticas ostentan el distintivo de su influencia e hizo aportaciones igualmente importantes a la física teórica (Fig. 22.11).

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada (una superficie que encierra un volumen definido) es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie. En la sección 22.1 observamos cualitativamente esta relación para ciertos casos especiales; ahora la desarrollaremos con más rigor. Comencemos con el campo de una sola carga puntual positiva  $q$ . Las líneas de campo se extienden en forma radial hacia afuera en todas direcciones por igual. Si colocamos la carga en el centro de una superficie esférica imaginaria de radio  $R$ , la magnitud  $E$  del campo eléctrico en todos los puntos de la superficie está dada por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

En cada punto de la superficie,  $\vec{E}$  es perpendicular a ésta y su magnitud es la misma en todos los puntos, como en el ejemplo 22.3 (sección 22.2). El flujo eléctrico total es simplemente el producto de la magnitud del campo  $E$  por el área total  $A = 4\pi R^2$  de la esfera:

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (22.6)$$

*El flujo es independiente del radio  $R$  de la esfera.* Depende únicamente de la carga  $q$  encerrada por la esfera.

Este resultado se puede interpretar también en términos de líneas de campo. La figura 22.12 muestra dos esferas de radios  $R$  y  $2R$ , respectivamente, centradas en la carga puntual  $q$ . Cada línea de campo que atraviesa la esfera pequeña también atraviesa la esfera grande, por lo que el flujo total a través de cada esfera es el mismo.

Lo que es verdad acerca de la esfera en su totalidad lo es también respecto a cualquier porción de su superficie. En la figura 22.12 un área  $dA$  aparece dibujada sobre una esfera de radio  $R$  y luego proyectada sobre la esfera de radio  $2R$  trazando líneas que parten del centro y pasan por puntos sobre la frontera de  $dA$ . El área proyectada



**22.11** Carl Friedrich Gauss contribuyó al desarrollo de varias ramas de las matemáticas, entre ellas la geometría diferencial, el análisis real y la teoría de números. La “curva de campana” de la estadística es una de sus invenciones. Gauss también realizó investigaciones de avanzada del magnetismo terrestre y calculó la órbita del primer asteroide que se descubrió.

sobre la esfera más grande es evidentemente  $4 dA$ . No obstante, dado que el campo eléctrico debido a una carga puntual es inversamente proporcional a  $r^2$ , la magnitud del campo es cuatro veces menor en la esfera de radio  $2R$  que en la de radio  $R$ . Por consiguiente, el flujo eléctrico es el mismo en ambas áreas y es independiente del radio de la esfera.

Esta técnica de proyección nos muestra cómo extender este análisis a superficies no esféricas. En vez de una segunda esfera, rodeemos la esfera de radio  $R$  con una superficie de forma irregular, como en la figura 22.13a. Considérese un elemento pequeño de área  $dA$  sobre la superficie irregular; vemos que esta área es *más grande* que el elemento correspondiente sobre una superficie esférica a la misma distancia de  $q$ . Si una normal a  $dA$  forma un ángulo  $\phi$  con una línea radial proveniente de  $q$ , dos lados del área proyectada sobre la superficie esférica son reducidos por un factor de  $\cos \phi$  (Fig. 22.13b). Los otros dos lados no cambian. Por tanto, el flujo eléctrico a través del elemento de la superficie esférica es igual al flujo  $E dA \cos \phi$  a través del elemento correspondiente de la superficie irregular.

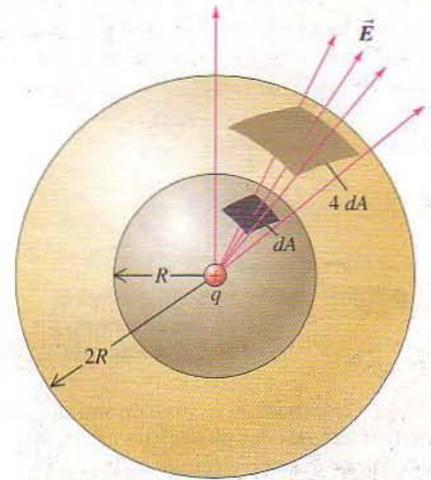
Podemos dividir toda la superficie irregular en elementos  $dA$ , calcular el flujo eléctrico  $E dA \cos \phi$  correspondiente a cada uno y sumar los resultados por integración, como en la ecuación (22.5). Cada uno de los elementos de área se proyecta sobre un elemento correspondiente de la superficie esférica. Así, el flujo eléctrico *total* a través de la superficie irregular, dado por cualquiera de las formas de la ecuación (22.5), debe ser el mismo que el flujo total a través de una esfera, que según la ecuación (22.6) es igual a  $q/\epsilon_0$ . De esta manera, para la superficie irregular,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (22.7)$$

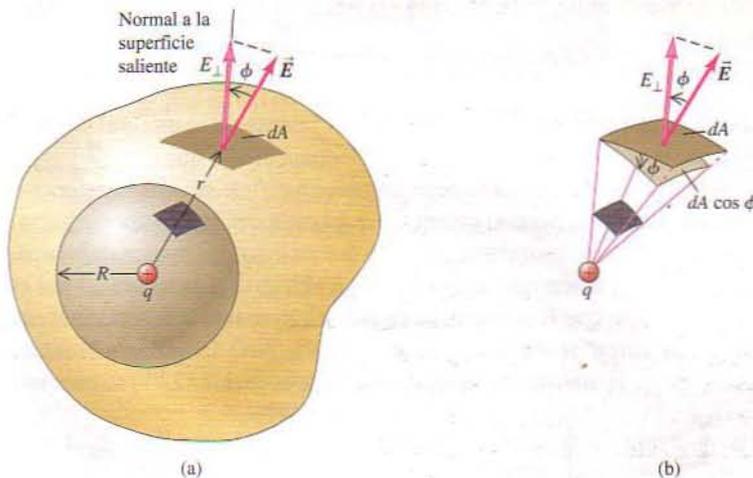
La ecuación (22.7) es válida para una superficie de *cualquier* forma o tamaño, con la sola condición de que se trate de una superficie *cerrada* que encierra la carga  $q$ . El círculo sobre el signo de integral nos recuerda que la integral se toma siempre con respecto a una superficie *cerrada*.

Los elementos de área  $d\vec{A}$  y los vectores unitarios  $\hat{n}$  correspondientes siempre apuntan *hacia afuera* del volumen encerrado por la superficie. Así, el flujo eléctrico es positivo en las regiones donde el campo eléctrico apunta hacia afuera de la superficie y negativo donde apunta hacia adentro. Asimismo,  $E_{\perp}$  es positivo en los puntos donde  $\vec{E}$  apunta hacia afuera respecto a la superficie y negativo en los puntos donde  $\vec{E}$  apunta hacia adentro de la superficie.

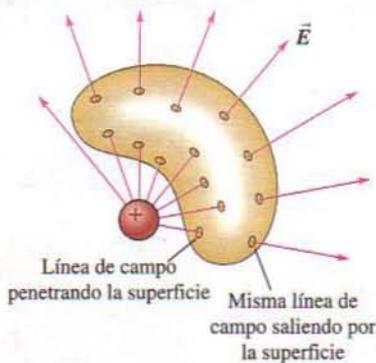
Si la carga puntual de la figura 22.13 es negativa, el campo  $\vec{E}$  está dirigido en forma radial *hacia adentro*; el ángulo  $\phi$  es entonces mayor de  $90^\circ$ , su coseno es



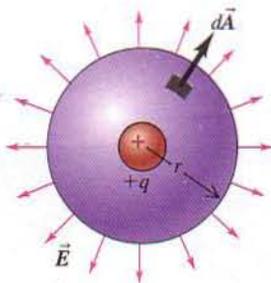
**22.12** Proyección de un elemento de área  $dA$  de una esfera de radio  $R$  sobre una esfera concéntrica de radio  $2R$ . La proyección multiplica las dimensiones lineales por 2; por tanto, el elemento de área en la esfera más grande es  $4 dA$ . El mismo número de líneas de campo y el mismo flujo pasan a través de cada elemento de área.



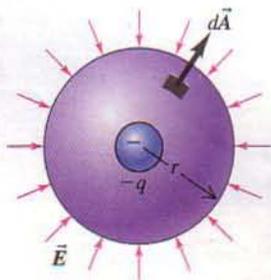
**22.13** (a) La normal a la superficie saliente forma un ángulo  $\phi$  con la dirección de  $\vec{E}$ . (b) La proyección del elemento de área  $dA$  sobre la superficie esférica es  $dA \cos \phi$ .



**22.14** Carga puntual externa de una superficie cerrada que no encierra carga. Si una línea de campo eléctrico de la carga externa penetra la superficie en un punto, debe salir por otro.



(a) Superficie gaussiana en torno a una carga positiva: flujo positivo (saliente)



(b) Superficie gaussiana en torno a una carga negativa: flujo negativo (entrante)

**22.15** Superficies gaussianas esféricas en torno a (a) una carga puntual positiva y (b) una carga puntual negativa.

negativo y la integral de la ecuación (22.7) es negativa. Antes bien, dado que  $q$  también es negativa, la ecuación (22.7) sigue siendo válida.

Para una superficie cerrada que *no* encierra carga,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Éste es el enunciado matemático que, cuando una región no contiene carga, cualesquiera líneas de campo originadas por cargas situadas *afuera* de la región que entran por un lado deben salir por el otro. (En la sección 22.1 llegamos a la misma conclusión considerando el caso especial de una caja rectangular en un campo uniforme). La figura 22.14 ilustra este punto. *Las líneas de campo eléctrico pueden iniciar o terminar dentro de una región del espacio sólo cuando hay carga en esa región.*

Ahora viene la etapa final para obtener la forma general de la ley de Gauss. Supóngase que la superficie encierra no sólo una carga puntual  $q$ , sino varias cargas  $q_1, q_2, q_3, \dots$ . El campo eléctrico total (resultante)  $\vec{E}$  en cualquier punto es la suma vectorial de los campos  $\vec{E}$  de las cargas individuales. Sea  $Q_{\text{enc}}$  la carga *total* encerrada por la superficie:  $Q_{\text{enc}} = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$ . Sea además  $\vec{E}$  el campo *total* en la posición del elemento de área superficial  $d\vec{A}$ , y sea  $E_{\perp}$  su componente perpendicular al plano de ese elemento (es decir, paralelo a  $d\vec{A}$ ). En estas condiciones se puede escribir una ecuación como la ecuación (22.7) con respecto a cada carga y su campo correspondiente y sumar los resultados. Al hacerlo, se obtiene el enunciado general de la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (\text{ley de Gauss}) \quad (22.8)$$

**El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica total (neta) presente en el interior de la superficie, dividida entre  $\epsilon_0$ .**

**CAUIDADO** Recuerde que la superficie cerrada de la ley de Gauss es *imaginaria*; no es necesario que haya objeto material alguno en la posición de la superficie. Se suele hacer referencia a las superficies cerradas que se emplean en la ley de Gauss como **superficies gaussianas**.

Con base en la definición de  $Q_{\text{enc}}$  y las diversas maneras de expresar el flujo eléctrico dadas en la ecuación (22.5), se puede expresar la ley de Gauss de las formas equivalentes siguientes:

$$\Phi_E = \oint E \cos \phi \, dA = \oint E_{\perp} \, dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (22.9)$$

(diversas formas de la ley de Gauss)

Al igual que en la ecuación (22.5), las diversas formas de la integral expresan todas lo mismo. Una forma resulta a veces más conveniente que otra.

Como ejemplo, la figura 22.15a muestra una superficie gaussiana esférica de radio  $r$  en torno a una carga puntual positiva  $+q$ . El campo eléctrico apunta hacia afuera respecto a la superficie gaussiana, de modo que en todos los puntos de la superficie  $\vec{E}$  tiene la misma dirección que  $d\vec{A}$ ,  $\phi = 0$ , y  $E_{\perp}$  es igual a la magnitud del campo  $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$ . Puesto que  $E$  es la misma en todos los puntos de la superficie, se puede sacar de la integral en la ecuación (22.9). Así, la integral restante es  $\int dA = A = 4\pi r^2$ , el área de la esfera. Por tanto, la ecuación (22.9) se convierte en

$$\Phi_E = \oint E_{\perp} \, dA = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La carga encerrada  $Q_{\text{enc}}$  es simplemente la carga  $+q$ , así que esto concuerda con la ley de Gauss. Si la superficie gaussiana encierra una carga puntual *negativa* como en la figura 22.15b, entonces  $\vec{E}$  apunta *hacia el interior* de la superficie en cada punto en la dirección opuesta a  $d\vec{A}$ . En estas condiciones  $\phi = 180^\circ$  y  $E_\perp$  es igual al negativo de la magnitud del campo:  $E_\perp = -E = -| -q | / 4\pi\epsilon_0 r^2 = -q / 4\pi\epsilon_0 r^2$ . La ecuación (22.9) se transforma entonces en

$$\Phi_E = \oint E_\perp dA = \oint \left( \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

Una vez más, esto concuerda con la ley de Gauss porque la carga encerrada de la figura 22.15b es  $Q_{\text{enc}} = -q$ .

En las ecuaciones (22.8) y (22.9),  $Q_{\text{enc}}$  es siempre la suma algebraica de todas las cargas positivas y negativas encerradas por la superficie gaussiana, y  $\vec{E}$  es el campo *total* en cada punto de la superficie. Dése cuenta además que, en general, este campo se debe en parte a cargas que están dentro de la superficie y en parte a cargas que están afuera. Pero como lo muestra la figura 22.14, las cargas externas *no* contribuyen al flujo total (neto) a través de la superficie. Así pues, las ecuaciones (22.8) y (22.9) son correctas incluso cuando hay cargas afuera de la superficie que contribuyen al campo eléctrico en la superficie. Cuando  $Q_{\text{enc}} = 0$ , el flujo total a través de la superficie gaussiana debe ser cero, no obstante que algunas regiones pueden tener flujo positivo y otras flujo negativo (véase la Fig. 22.3b).

La ley de Gauss es la respuesta definitiva a la pregunta planteada al iniciar la sección 22.1: “Si se conoce la configuración del campo eléctrico en una región determinada, ¿qué se puede saber acerca de la distribución de carga en esa región?” Esta ley proporciona una relación entre el campo eléctrico sobre una superficie cerrada y la distribución de carga dentro de esa superficie. Pero en ciertos casos la ley de Gauss permite responder la pregunta inversa: “Si se conoce la distribución de carga, ¿qué se puede saber acerca del campo eléctrico que la distribución de carga produce?” La ley de Gauss puede parecer una manera poco atractiva de abordar esta cuestión, pues quizá parezca que la evaluación de la integral de la ecuación (22.8) es una tarea imposible. A veces lo es, pero en otros casos resulta sorprendentemente fácil. He aquí un ejemplo en el que *no* es integración alguna; resolveremos varios ejemplos más en la sección siguiente.

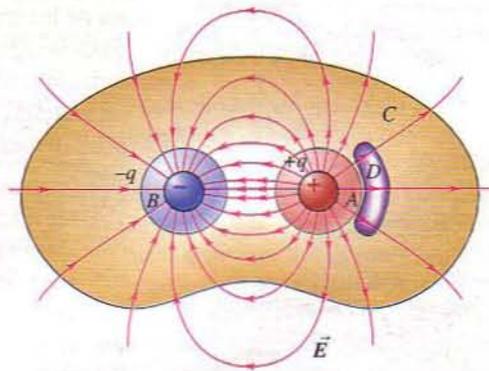
### Ejemplo conceptual 22.4

### Flujo eléctrico y carga encerrada

La figura 22.16 muestra el campo producido por dos cargas puntuales  $+q$  y  $-q$  de igual magnitud pero de signo opuesto (un dipolo eléctrico). Halle el flujo eléctrico a través de cada una de las superficies cerradas A, B, C y D.

#### SOLUCIÓN

La definición de flujo eléctrico dada en la ecuación (22.5) tiene que ver con una integral de superficie; de esta manera, podría parecer que se requiere resolver una integral. Pero la ley de Gauss afirma que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual al cociente de la carga total encerrada entre  $\epsilon_0$ . Por inspección de la figura 22.16, la superficie A (en rojo) encierra la carga positiva, de modo que  $Q_{\text{enc}} = +q$ ; la superficie B (en azul) encierra la carga negativa, así que  $Q_{\text{enc}} = -q$ ; la superficie C (en amarillo), que encierra *ambas* cargas, tiene una  $Q_{\text{enc}} = +q + (-q) = 0$ ; y la superficie D (en morado), que no encierra carga alguna, también tiene una



**22.16** El número neto de líneas de campo que salen de una superficie cerrada es proporcional a la carga total encerrada por esa superficie.

$Q_{\text{enc}} = 0$ . Por consiguiente, sin necesidad de hacer ninguna integración, se concluye que los flujos totales de las diversas superficies son  $\Phi_E = +q/\epsilon_0$  en el caso de la superficie A,  $\Phi_E = -q/\epsilon_0$  en el de la superficie B, y  $\Phi_E = 0$  en el de las superficies tanto C como D.

Estos resultados dependen únicamente de las cargas encerradas dentro de cada superficie gaussiana, no de la forma precisa de las superficies. Por ejemplo, compárese la superficie C con la superficie rectangular que se muestra en la figura 22.3b, que también encierra las dos cargas de un dipolo eléctrico. También en ese caso se llegó a la conclusión de que el flujo neto de  $\vec{E}$  era cero; el flujo entrante en una parte de la superficie compensa exactamente el flujo saliente en el resto de la superficie.

Podemos sacar conclusiones semejantes examinando las líneas de campo eléctrico. La superficie A encierra sólo la carga positiva;

en la figura 22.16, 18 de las líneas representadas cruzan A en una dirección saliente. La superficie B encierra únicamente la carga negativa y la cruzan estas mismas 18 líneas, pero en una dirección entrante. La superficie C encierra *ambas* cargas y la cruzan líneas en 16 puntos; en 8 intersecciones las líneas son salientes y en 8 son entrantes. El número *neto* de líneas que cruzan en dirección saliente es cero y la carga neta en el interior de la superficie también es cero. La superficie D es cruzada en 6 puntos; en 3 puntos las líneas son salientes y en los otros 3 son entrantes. Tanto el número neto de líneas que cruzan en dirección saliente como la carga total encerrada son cero. Hay puntos de las superficies donde  $\vec{E}$  no es perpendicular a la superficie, pero esto no influye en el conteo de las líneas de campo.

### Evalúe su comprensión

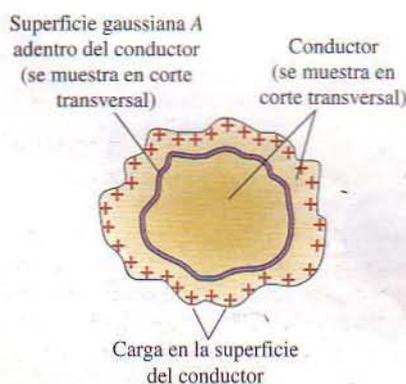
¿Cuál es el flujo eléctrico total a través de una superficie que encierra totalmente un ion litio negativo (Fig. 21.4c)? ¿Cómo influiría en su respuesta el hecho de que se extendiera la superficie sin dejar de encerrar el ion (y ninguna otra carga)?

## 22.4 | Aplicaciones de la ley de Gauss

La ley de Gauss es válida con respecto a *cualquier* distribución de cargas y a *cualquier* superficie cerrada. Esta ley es útil de dos maneras. Si se conoce la distribución de carga, y si ésta tiene la simetría suficiente para que sea posible evaluar la integral de la ley de Gauss, se puede hallar el campo. O bien, si se conoce el campo, la ley de Gauss permite hallar la distribución de carga, por ejemplo, las cargas sobre superficies conductoras.

En esta sección se presentan ejemplos de ambas clases de aplicaciones. Al estudiarlos, procure identificar el papel de las propiedades de simetría de cada sistema. Emplearemos la ley de Gauss para calcular los campos eléctricos creados por varias distribuciones de carga simples; los resultados se reúnen en una tabla en el resumen del capítulo.

En los problemas prácticos es frecuente encontrar situaciones en las que se desea conocer el campo eléctrico creado por una distribución de carga sobre un conductor. Estos cálculos se facilitan en virtud del hecho notable siguiente: *cuando se coloca en un conductor un exceso de carga y ésta se halla en reposo, reside en su totalidad en la superficie, no en el interior del material.* (Un exceso significa cargas diferentes de los iones y electrones libres que constituyen el conductor neutro). La prueba es la siguiente. Sabemos (sección 21.4) que en una situación electrostática (con todas las cargas en reposo) el campo eléctrico  $\vec{E}$  en todos los puntos del interior de un material conductor es cero. Si  $\vec{E}$  no fuera cero, las cargas se desplazarían. Supóngase que se construye una superficie gaussiana dentro de un conductor, como la superficie A de la figura 22.17. Puesto que  $\vec{E} = 0$  en todos los puntos de esta superficie, la ley de Gauss exige que la carga neta dentro de la superficie sea cero. Ahora supongamos que la superficie se encoge como un globo que se desinfla hasta encerrar una región tan pequeña que se puede considerar como un punto P; entonces la carga en ese punto debe ser cero. Se puede hacer esto dondequiera en el interior del conductor; por tanto, *no puede haber un exceso de carga en punto alguno dentro de un conductor sólido; todo exceso de carga debe residir en la superficie del conductor.* (Este resultado corresponde a un conductor sólido. En la sección que sigue comentaremos lo que puede ocurrir si el conductor tiene cavidades en su interior). Haremos uso frecuente de este hecho en los ejemplos.



**22.17** En condiciones electrostáticas (cargas sin movimiento), todo exceso de carga en un conductor sólido reside en su totalidad en la superficie del conductor.

## Estrategia para resolver problemas

## Con la ley de Gauss

**IDENTIFICAR** *los conceptos pertinentes:* la ley de Gauss resulta más útil en situaciones donde la distribución de carga tiene simetría esférica o cilíndrica o es uniforme en todo un plano. En estas situaciones se establece la dirección de  $\vec{E}$  a partir de la simetría de la distribución de carga. Si se proporciona la distribución de carga, la ley de Gauss permite hallar la magnitud de  $\vec{E}$ . Por otra parte, si se conoce el campo, la ley de Gauss permite establecer los detalles de la distribución de carga. En uno u otro caso, inicie su análisis formulando la pregunta: “¿cuál es la simetría?”

**PLANTEAR** *el problema utilizando las etapas siguientes:*

1. Elija la superficie que utilizará con la ley de Gauss, a la cual se le suele llamar *superficie gaussiana*. Si se propone hallar el campo en un punto determinado, entonces ese punto debe estar sobre la superficie gaussiana.
2. No es necesario que la superficie gaussiana sea una superficie física real, como una superficie de un cuerpo sólido. En muchos casos la superficie apropiada es una superficie geométrica imaginaria; puede ser espacio vacío, estar incrustada en un cuerpo sólido, o ambas cosas.
3. Por lo general se puede evaluar la integral de la ley de Gauss (sin ayuda de una computadora) sólo si la superficie gaussiana y la distribución de carga tienen alguna propiedad de simetría. Si la distribución de carga tiene simetría cilíndrica o esférica, elija una superficie gaussiana coaxial al cilindro o que sea una esfera concéntrica, respectivamente.

**EJECUTAR** *la solución como sigue:*

1. Lleve a cabo la integral de la ecuación (22.9). Esto puede parecer una tarea de enormes proporciones, pero la simetría de la distribución de carga, aunada a una elección cuidadosa de la superficie gaussiana, la facilita enormemente.
2. En muchos casos es posible pensar en la superficie gaussiana cerrada como compuesta de varias superficies individuales, como los lados y los extremos de un cilindro. La

integral  $\oint \vec{E}_\perp dA$  con respecto a la superficie cerrada en su totalidad siempre es igual a la suma de las integrales con respecto a todas las superficies individuales. Algunas de estas integrales pueden ser cero, como lo muestran los puntos 4 y 5 siguientes.

3. Si  $\vec{E}$  es *perpendicular* (normal) en todos los puntos a una superficie de área  $A$ , si apunta *hacia afuera* desde el interior de la superficie y si además tiene la misma *magnitud* en todos los puntos de la superficie, entonces  $E_\perp = E = \text{constante}$ , y  $\int E_\perp dA$  con respecto a la superficie es igual a  $EA$ . Si  $\vec{E}$  más bien es perpendicular y *entrante*, en tal caso  $E_\perp = -E$  y  $\int E_\perp dA = -EA$ .
4. Si  $\vec{E}$  es *tangente* a una superficie en todos los puntos, por tanto  $E_\perp = 0$  y la integral con respecto a esa superficie es cero.
5. Si  $\vec{E} = 0$  en todos los puntos de una superficie, la integral es cero.
6. En la integral  $\oint \vec{E}_\perp dA$ ,  $E_\perp$  es siempre la componente perpendicular del campo eléctrico *total* en cada punto de la superficie gaussiana cerrada. En general, este campo puede deberse en parte a cargas situadas dentro de la superficie y en parte a cargas que están afuera de ella. Incluso cuando *no* hay carga dentro de la superficie, el campo en todos los puntos de la superficie gaussiana no es necesariamente cero. De cualquier manera, en ese caso la *integral* con respecto a la superficie gaussiana, es decir, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana, siempre es cero.
7. Una vez evaluada la integral, resuelva la ecuación (22.9) a favor de la variable que busca.

**EVALUAR** *la respuesta:* En muchos casos el resultado será una *función* que describe cómo varía la magnitud del campo eléctrico con la posición. Examine esta función con ojo crítico para ver si es razonable.

## Ejemplo 22.5

## Campo de una esfera conductora con carga

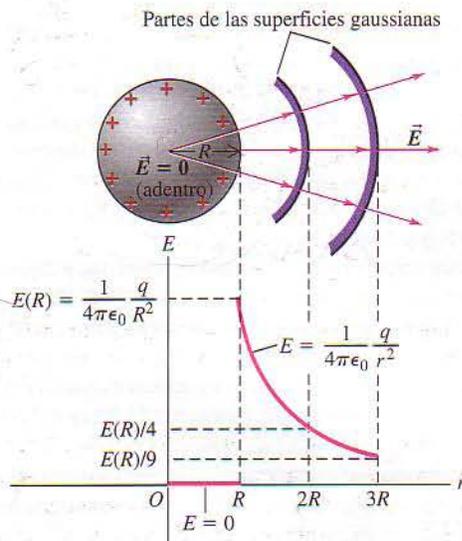
Se coloca una carga positiva  $q$  en una esfera conductora sólida de radio  $R$  (Fig. 22.18). Halle  $\vec{E}$  en cualquier punto adentro o afuera de la esfera.

## SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Como ya se comentó en esta sección, toda la carga debe estar en la superficie de la esfera. El sistema tiene simetría esférica.

**PLANTEAR:** Para aprovechar la simetría, se toma como superficie gaussiana una esfera imaginaria de radio  $r$  centrada en el conductor. Para calcular el campo afuera del conductor, se toma  $r$  como mayor que el radio del conductor  $R$ ; para calcular el campo adentro, se toma  $r$  como menor que  $R$ . En ambos casos, el punto donde se desea calcular  $\vec{E}$  se encuentra sobre la superficie gaussiana.

**EJECUTAR:** El papel de la simetría amerita un análisis minucioso antes de realizar algún cálculo. Cuando se afirma que el sistema es esféricamente simétrico, quiere decir que si se hace girar el sistema un ángulo cualquiera alrededor de cualquier eje que pase por su centro, después de la rotación no se puede distinguir del sistema original sin rotación. Nada hay en el sistema que permita distinguir una dirección u orientación en el espacio de otra. La carga tiene libertad de movimiento en el conductor y nada tiene el conductor que pudiese inducir la a concentrarse más en unas regiones que en otras. Si no fuera uniforme, entonces al hacer girar el sistema la esfera tendría el mismo aspecto pero la distribución de carga se vería diferente, y ninguna propiedad de la esfera puede hacer que esto ocurra. Por tanto, se concluye que la carga está distribuida *uniformemente* en toda la superficie.



**22.18** En condiciones electrostáticas el campo eléctrico adentro de una esfera conductora sólida es cero. Afuera de la esfera el campo eléctrico decae con  $1/r^2$ , como si todo el exceso de carga de la esfera estuviese concentrado en su centro.

Un argumento similar demuestra que la dirección del campo eléctrico debe ser *radial*, como se muestra en la figura 22.18. Si nuevamente se hace girar el sistema, la disposición del campo del sistema con rotación debe ser idéntica a la del sistema original. Si el campo tuviese una componente en algún punto perpendicular a la dirección radial, esa componente tendría que ser diferente al cabo de al menos algunas rotaciones. Por tanto, no puede haber una componente de esta naturaleza, y el campo debe ser radial. Por la misma razón, la magnitud  $E$  del campo sólo puede depender de la distancia  $r$  respecto al centro y debe tener el mismo valor en todos los puntos de una superficie esférica concéntrica con el conductor.

La elección de una esfera como superficie gaussiana permite aprovechar estas propiedades de simetría. Consideramos primero el campo afuera del conductor; por consiguiente, elegimos  $r > R$ . El conductor en su totalidad está dentro de la superficie gaussiana; por tanto, la carga encerrada es  $q$ . El área de la superficie gaussiana es  $4\pi r^2$ ,  $\vec{E}$  es uniforme en toda la superficie y perpendicular a ella en todos los puntos. La integral de flujo  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$  de la ley de Gauss es en consecuencia simplemente  $E(4\pi r^2)$  y la ecuación (22.8) da

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad y$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{afuera de una esfera conductora con carga})$$

### Ejemplo 22.6

### Campo de una carga lineal

Se tiene carga eléctrica distribuida de manera uniforme a lo largo de un alambre delgado infinitamente largo. La carga en cada unidad de longitud es  $\lambda$  (se supone positiva). Halle el campo eléctrico. (Esto es

Esta expresión del campo en cualquier punto *afuera* de la esfera ( $r > R$ ) es igual a la de una carga puntual; el campo debido a la esfera con carga es equivalente al que habría si toda la carga estuviese concentrada en su centro. Inmediatamente afuera de la superficie de la esfera, donde  $r = R$ ,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

(en la superficie de una esfera conductora con carga)

**CUIDADO** Recuerde que hemos optado por que la carga elegida  $q$  sea *positiva*. Si la carga es negativa, el campo eléctrico es radialmente *entrante* en vez de radialmente saliente, y el flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana es negativo. Las magnitudes del campo eléctrico afuera y en la superficie de la esfera están dadas por las mismas expresiones que antes, excepto que  $q$  denota la *magnitud* (valor absoluto) de la carga.

Para hallar  $\vec{E}$  adentro del conductor se usa una superficie gaussiana esférica de radio  $r < R$ . La simetría esférica nos dice una vez más que  $E(4\pi r^2) = Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$ . Sin embargo, debido a que toda la carga está en la superficie del conductor, la superficie gaussiana (que está en su totalidad adentro del conductor) *no* encierra carga alguna. Así pues,  $Q_{\text{enc}} = 0$  y, por tanto, el campo eléctrico adentro del conductor es cero.

**EVALUAR:** Ya sabemos que  $\vec{E} = 0$  adentro del conductor, como debe ser en el interior de todo conductor sólido cuando las cargas están en reposo. La figura 22.18 muestra  $E$  en función de la distancia  $r$  respecto al centro de la esfera. Dése cuenta que en el límite cuando  $R \rightarrow 0$  la esfera se convierte en una carga puntual; en esas condiciones hay sólo un "afuera", y el campo está dado en todas partes por  $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$ . De este modo hemos deducido la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss. (En la sección 22.3 dedujimos la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb, así que con esto se completa la demostración de su equivalencia lógica).

Este método también es aplicable a un conductor *forma de cascarón* esférico (con un conductor esférico con un hueco esférico concéntrico en el centro) y no hay carga dentro del hueco. Se usa una superficie gaussiana esférica de radio  $r$ , menor que el radio del hueco. Si *hubiera* un campo dentro del hueco, tendría que ser radial y esféricamente simétrico, como antes; por tanto,  $E = Q_{\text{enc}}/4\pi\epsilon_0 r^2$ . Pero ahora no hay carga encerrada, así que  $Q_{\text{enc}} = 0$  y  $E = 0$  en el interior del hueco.

¿Se puede emplear esta misma técnica para hallar el campo eléctrico en el espacio intermedio entre una esfera con carga y una esfera conductora hueca concéntrica que la rodea?

una representación aproximada del campo de un alambre *finito* con carga uniforme, siempre y cuando la distancia del punto de campo al alambre sea mucho menor que la longitud del alambre).

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** El sistema tiene *simetría cilíndrica*. El campo debe apuntar alejándose de las cargas positivas. Para establecer la dirección de  $\vec{E}$  con más precisión, así como el modo como su magnitud depende de la posición, se hace uso de la simetría como en el ejemplo 22.5.

**PLANTEAR:** Una simetría cilíndrica significa que se puede hacer girar el sistema cualquier ángulo en torno a su eje, y se puede desplazar cualquier distancia a lo largo del eje; en todos los casos el sistema resultante no se puede distinguir del original. Con base en el mismo argumento empleado en el ejemplo 22.5, se concluye que  $\vec{E}$  en cada punto no cambia cuando se lleva a cabo una u otra de estas operaciones. El campo no puede tener una componente paralela al alambre; si la tuviese, sería necesario explicar por qué las líneas de campo que comienzan en el alambre apuntan en una dirección paralela al alambre y no en la otra. Asimismo, el campo no puede tener una componente tangente a un círculo en un plano perpendicular al alambre con su centro en el alambre. Si lo tuviese, se tendría que explicar porque la componente está dirigida en una dirección alrededor del alambre diferente a la otra. Todo lo que resta es una componente radialmente hacia afuera con respecto al alambre en cada punto. Por tanto, las líneas de campo afuera de un alambre infinito con carga uniforme son *radiales* y se localizan en planos perpendiculares al alambre. La *magnitud* del campo sólo puede depender de la distancia radial respecto al alambre.

Estas propiedades de simetría sugieren el empleo como superficie gaussiana de un cilindro de radio arbitrario  $r$  y longitud arbitraria  $l$ , con sus extremos perpendiculares al alambre (Fig. 22.19).

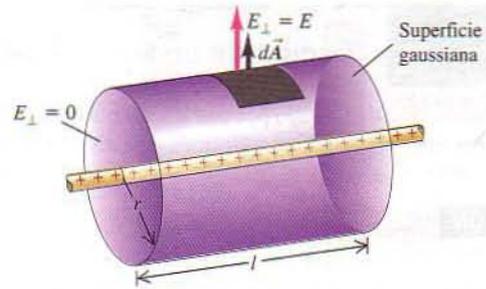
**EJECUTAR:** Se descompone la integral de superficie del flujo  $\Phi_E$  en una integral con respecto a cada extremo plano y una con respecto a las paredes laterales curvas. No hay flujo a través de los extremos porque  $\vec{E}$  se encuentra en el plano de la superficie y  $E_{\perp} = 0$ . Para hallar el flujo a través de las paredes laterales, dése cuenta que  $\vec{E}$  es perpendicular a la superficie en cada punto, por lo que  $E = E_{\perp}$ ; por simetría,  $E$  tiene el mismo valor en todos los puntos de la pared. El área de la pared lateral es  $2\pi rl$ . (Para hacer un cilindro de papel de radio  $r$  y altura  $l$  se necesita un rectángulo de papel de anchura  $2\pi r$ , altura  $l$  y área  $2\pi rl$ ). Por tanto, el flujo total  $\Phi_E$  a través de todo el cilindro es la suma del flujo a través de la pared lateral, que es  $(E)(2\pi rl)$ , y el flujo cero a través de los dos extremos. Por último, se necesita la carga total encerrada, que es la carga en cada unidad de longitud multiplicada por la longitud del alambre que está adentro de la superficie gaussiana, esto es,  $Q_{\text{enc}} = \lambda l$ . Por la ley de Gauss [ecuación (22.8)],

$$\Phi_E = (E)(2\pi rl) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad (\text{campo de una línea infinita con carga})$$

Este resultado es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 22.11 (sección 21.5) por medios mucho más laboriosos.

Hemos supuesto que  $\lambda$  es *positiva*. Si es *negativa*,  $\vec{E}$  está dirigido radialmente hacia adentro, de la línea de carga, y en la expresión anterior de la magnitud del campo  $E$  se debe interpretar  $\lambda$  como la *magnitud* (valor absoluto) de la carga en cada unidad de longitud.



**22.19** Se usa una superficie gaussiana cilíndrica coaxial para hallar el campo eléctrico afuera de un alambre infinitamente largo con carga.

**EVALUAR:** Dése cuenta que, no obstante que la *totalidad* de la carga del alambre contribuye al campo, sólo se considera la parte de la carga total que está dentro de la superficie gaussiana al aplicar la ley de Gauss. Esto quizá parezca extraño; da la impresión de que, de algún modo, hemos obtenido la respuesta correcta sin tener en cuenta parte de la carga, y que el campo de un alambre *corto* de longitud  $l$  sería el mismo que el de un alambre muy largo. Pero *sí* se incluye la totalidad de la carga del alambre al hacer uso de la *simetría* del problema. Si el alambre es corto, la simetría con respecto a desplazamientos a lo largo del eje no está presente, y el campo no es uniforme en términos de magnitud en toda la superficie gaussiana. La ley de Gauss deja entonces de ser útil y *no sirve* para hallar el campo; la mejor forma de atacar el problema es mediante la técnica de integración empleada en el ejemplo 21.11.

Se puede usar una superficie gaussiana como la de la figura 22.19 para mostrar que el campo en puntos situados afuera de un cilindro largo con carga uniforme es el mismo que se tendría si la carga estuviera concentrada en una recta a lo largo de su eje. También se puede calcular el campo eléctrico en el espacio comprendido entre un cilindro con carga y un cilindro conductor coaxial hueco que lo rodea. Éste es un modelo de un cable coaxial, como los cables con los que se conecta el televisor a una "toma" de televisión por cable (Fig. 22.20). Se dejan estos cálculos como problemas.



**22.20** En el interior de un cable coaxial hay un alambre conductor dentro de un cilindro conductor. El campo eléctrico estático de este dispositivo se calcula con base en la ley de Gauss.

Ejemplo  
22.7

## Campo de una lámina plana infinita de carga

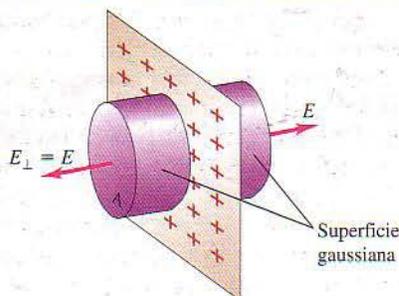
Halle el campo eléctrico creado por una lámina plana delgada infinita que tiene una carga positiva uniformemente distribuida en cada unidad de área  $\sigma$ .

## SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** El campo debe apuntar alejándose de la lámina con carga positiva. Como en los ejemplos 22.5 y 22.6, antes de hacer cálculos se emplea la simetría (en este caso, simetría *plana*) para saber más acerca de la dependencia de  $\vec{E}$  respecto a la dirección y a la posición.

**PLANTEAR:** Una simetría plana significa que la distribución de carga no cambia si se desliza en cualquier dirección paralela a la lámina. De esto se concluye que en cada punto  $\vec{E}$  es perpendicular a la lámina. La simetría también nos dice que el campo debe tener la misma magnitud  $E$  a cualquier distancia dada a uno u otro lado de la lámina. Para aprovechar estas propiedades de simetría se emplea como superficie gaussiana un cilindro con su eje perpendicular a la lámina de carga y con extremos de área  $A$  (Fig. 22.21).

**EJECUTAR:** La lámina con carga pasa por el punto medio de la longitud del cilindro, de modo que los extremos del cilindro están



**22.21** Se utiliza una superficie gaussiana cilíndrica para hallar el campo de una lámina plana infinita de carga.

Ejemplo  
22.8

## Campo entre placas conductoras paralelas con cargas opuestas

A dos grandes placas planas conductoras y paralelas se les proporcionan cargas de igual magnitud y signo opuesto; la carga por unidad de área es  $+\sigma$  en una y  $-\sigma$  en la otra. Halle el campo eléctrico en la región comprendida entre las placas.

## SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** El campo entre las placas y alrededor de ellas es aproximadamente como se muestra en la figura 22.22a. Dado que las cargas opuestas se atraen, la mayor parte de la carga se acumula en caras interiores de las placas. Una cantidad pequeña de carga reside en las superficies *exteriores* de las placas, y hay cierta dispersión o “pestaño” del campo en las orillas. Pero si las placas son muy grandes en comparación con la distancia que las separa, la cantidad de carga en las superficies exteriores es tan pequeña que resulta insignificante, y se puede pasar por alto el “pestaño”, excepto cerca de las

equidistantes de la lámina. En cada extremo del cilindro,  $\vec{E}$  es perpendicular a la superficie y  $E_{\perp}$  es igual a  $E$ ; por tanto, el flujo a través de cada extremo es  $+EA$ .

Puesto que  $\vec{E}$  es perpendicular a la lámina con carga, es paralelo a la pared *lateral* curva del cilindro; por tanto,  $E_{\perp}$  en esta pared es cero y no hay flujo a través de ella. La integral del flujo total de la ley de Gauss es entonces  $2EA$  ( $EA$  de cada extremo y cero de la pared lateral). La carga neta dentro de la superficie gaussiana es la carga en cada unidad de área multiplicada por el área de la lámina encerrada por la superficie, es decir,  $Q_{\text{enc}} = \sigma A$ . Por consiguiente, la ley de Gauss [ecuación (22.8)] da

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{campo de una lámina infinita con carga})$$

Este resultado es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 21.12 (sección 21.5) mediante un cálculo mucho más complejo. El campo es uniforme y su dirección es perpendicular al plano de la lámina. Su magnitud es *independiente* de la distancia respecto a la lámina. Las líneas de campo son, por consiguiente, rectas, paralelas unas a otras y perpendiculares a la lámina.

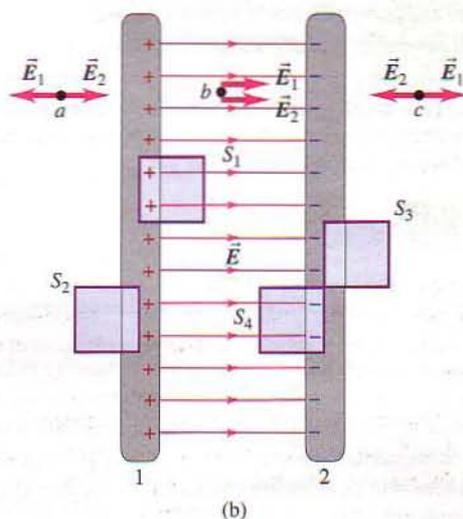
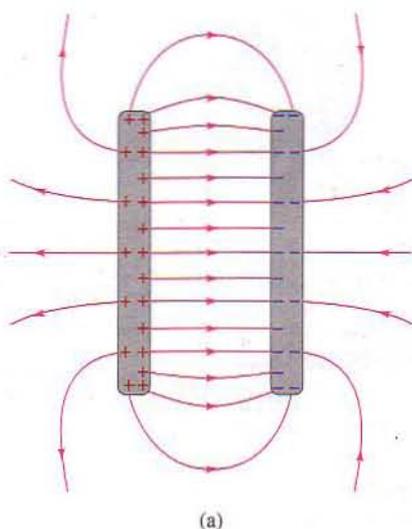
Si la densidad de carga es negativa,  $\vec{E}$  está dirigido *hacia* la lámina, el flujo a través de la superficie gaussiana de la figura 22.21 es negativo y  $\sigma$  de la expresión  $E = \sigma/2\epsilon_0$  denota la magnitud (valor absoluto) de la densidad de carga.

**EVALUAR:** El supuesto de que la lámina es infinitamente grande es una idealización; en la naturaleza nada es infinitamente grande. Pero el resultado  $E = \sigma/2\epsilon_0$  es una buena aproximación en el caso de puntos próximos a la lámina (en comparación con las dimensiones de la lámina) y no demasiado cercanos a los bordes. En estos puntos, el campo es casi uniforme y perpendicular al plano.

orillas. En este caso se supone que el campo es uniforme en la región interior entre las placas, como en la figura 22.22b, y que las cargas están distribuidas de manera uniforme en las superficies opuestas.

**PLANTEAR:** Para aprovechar esta simetría se pueden emplear las superficies gaussianas sombreadas  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$ . Estas superficies son cilindros con extremos de área  $A$ , como el que se muestra en perspectiva en la figura 22.21; se muestran vistos de lado en la figura 22.22b. Un extremo de cada superficie se encuentra dentro de una de las placas conductoras.

**EJECUTAR:** Con respecto a la superficie identificada como  $S_1$ , el extremo izquierdo está dentro de la placa 1 (la placa positiva). Puesto que el campo es cero dentro del volumen de todo conductor sólido en condiciones electrostáticas, no hay flujo eléctrico a través de este extremo. El campo eléctrico entre las placas es perpendicular al extre-



**22.22** Campo eléctrico entre placas paralelas con carga opuesta. (a) El campo entre las placas es bastante uniforme, salvo en las orillas. (b) Caso idealizado en el que se pasa por alto el “pestañeo” en las orillas.

mo derecho, de modo que en ese extremo  $E_{\perp}$  es igual a  $E$  y el flujo es  $EA$ ; éste es positivo, puesto que  $\vec{E}$  se dirige hacia afuera de la superficie gaussiana. No hay flujo a través de la pared lateral del cilindro, porque esta pared es paralela a  $\vec{E}$ . Por consiguiente, la integral del flujo total de la ley de Gauss es  $EA$ . La carga neta encerrada por el cilindro es  $\sigma A$  y la ecuación (22.8) da, por tanto,

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

(campo entre placas conductoras con cargas opuestas)

El campo es uniforme y perpendicular a las placas y su magnitud es independiente de la distancia respecto a cualquiera de ellas. Se obtiene este mismo resultado empleando la superficie gaussiana  $S_4$ ; además, se pueden emplear las superficies  $S_2$  y  $S_3$  para mostrar que

$E = 0$  a la izquierda de la placa 1 y a la derecha de la placa 2. Se dejan estos cálculos como problema.

**EVALUAR:** En el ejemplo 21.13 (sección 21.5) se obtuvieron los resultados anteriores con base en el principio de superposición de campos eléctricos. Los campos debidos a las dos láminas de carga (uno en cada placa) son  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ ; según el ejemplo 22.7, la magnitud de ambos es  $\sigma/2\epsilon_0$ . El campo eléctrico total (resultante) en cualquier punto es la suma vectorial  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . En los puntos  $a$  y  $c$  de la figura 22.2b,  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  tienen direcciones opuestas y su resultante es cero. Esto también se cumple en todos los puntos dentro del material de cada placa, en armonía con el requisito de que con cargas en reposo no puede haber campo alguno dentro de un conductor sólido. En cualquier punto  $b$  entre las dos placas,  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  tienen la misma dirección; la magnitud de su resultante es  $E = \sigma/\epsilon_0$ , lo mismo que encontramos con base en la ley de Gauss.

### Ejemplo 22.9

## Campo de una esfera con carga uniforme

Una carga positiva  $Q$  distribuida de manera uniforme en todo el volumen de una esfera aislante de radio  $R$ . Halle la magnitud del campo eléctrico en un punto  $P$  que se encuentra a una distancia  $r$  del centro de la esfera.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Al igual que en el ejemplo 22.5, el sistema es esféricamente simétrico. Por consiguiente, podemos emplear las conclusiones de ese ejemplo acerca de la dirección y magnitud de  $\vec{E}$ . Para hacer uso de la simetría, elegimos como superficie gaussiana una esfera de radio  $r$ , concéntrica con la distribución de carga.

**EJECUTAR:** Por simetría la magnitud  $E$  del campo eléctrico tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie gaussiana, y la di-

rección de  $\vec{E}$  es radial en todos los puntos de la superficie; por tanto,  $E_{\perp} = E$ . Por consiguiente, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana es el producto de  $E$  por el área total de la superficie,  $A = 4\pi r^2$ , es decir,  $\Phi_E = 4\pi r^2 E$ .

La cantidad de carga encerrada en el interior de la superficie gaussiana depende del radio  $r$ . Hallemos en primer término la magnitud del campo adentro de la esfera con carga de radio  $R$ ; la magnitud de  $E$  se evalúa en el radio de la superficie gaussiana, de modo que elegimos  $r < R$ . La densidad de carga volumétrica  $\rho$  es el cociente de la carga  $Q$  entre el volumen de toda la esfera con carga de radio  $R$ :

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$$

El volumen  $V_{\text{enc}}$  encerrado por la superficie gaussiana es  $\frac{4}{3}\pi r^3$ , por tanto, la carga total  $Q_{\text{enc}}$  encerrada por esa superficie es

$$Q_{\text{enc}} = \rho V_{\text{enc}} = \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q \frac{r^3}{R^3}$$

Entonces la ley de Gauss [ecuación (22.8)] se transforma en

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \quad \text{o}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \quad (\text{campo adentro de una esfera con carga uniforme})$$

La magnitud del campo es proporcional a la distancia  $r$  entre el punto del campo y el centro de la esfera. En el centro ( $r = 0$ ),  $E = 0$ .

Para hallar la magnitud del campo *afuera* de la esfera con carga se emplea la superficie gaussiana de radio  $r > R$ . Esta superficie encierra la totalidad de la esfera con carga, por lo que  $Q_{\text{enc}} = Q$ , y la ley de Gauss da

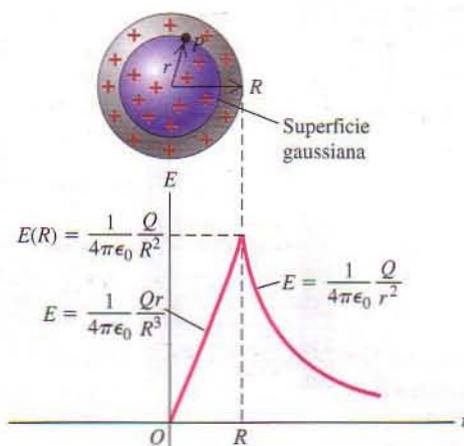
$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{o}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (\text{campo afuera de una esfera con carga uniforme})$$

En *cualquier* cuerpo esféricamente simétrico con carga, el campo eléctrico afuera del cuerpo es el mismo que si toda la carga estuviese concentrada en el centro. (Hicimos esta misma observación en el ejemplo 22.5).

La figura 22.23 muestra una gráfica de  $E$  en función de  $r$  correspondiente a este problema. Cuando  $r < R$ ,  $E$  es directamente proporcional a  $r$ , y cuando  $r > R$ ,  $E$  varía con  $1/r^2$ . Si la carga es negativa en vez de positiva,  $\vec{E}$  es radialmente *entrante* y  $Q$  en las expresiones de  $E$  se interpreta como la magnitud (valor absoluto) de la carga.

**EVALUAR:** Dése cuenta que si se toma  $r = R$  en cualquiera de las dos expresiones de  $E$  (adentro o afuera de la esfera), se obtiene el



**22.23** Magnitud del campo eléctrico de una esfera aislante con carga uniforme. Compárese con el campo de una esfera conductora (Fig. 22.18).

mismo resultado  $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$  de la magnitud del campo en la superficie de la esfera; esto se debe a que la magnitud de  $E$  es una función *continua* de  $r$ . En cambio, en el caso de la esfera conductora con carga del ejemplo 22.5 la magnitud del campo eléctrico es *discontinua* en  $r = R$  (salta de  $E = 0$  inmediatamente adentro de la esfera a  $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$  inmediatamente afuera de ella). En general, el campo eléctrico  $\vec{E}$  es discontinuo en términos de magnitud, dirección o ambas cosas siempre que hay una *lámina* con carga, como en la superficie de una esfera conductora con carga (ejemplo 22.5), en la superficie de una lámina con carga infinita (ejemplo 22.7) o en la superficie de una placa conductora con carga (ejemplo 22.8).

La técnica general utilizada en este ejemplo es aplicable a *cualquier* distribución esféricamente simétrica de carga, ya sea uniforme o no. Distribuciones de este tipo se presentan en el interior de muchos átomos y núcleos atómicos; por esta razón, la ley de Gauss es una herramienta útil en física atómica y nuclear.

### Ejemplo 22.10

## Campo de una esfera hueca con carga

Una esfera hueca de pared delgada y con un radio de 0.250 m tiene una cantidad desconocida de carga distribuida uniformemente en toda su superficie. A una distancia de 0.300 m del centro de la esfera, el campo eléctrico apunta directamente hacia el centro de la esfera y su magnitud es de  $1.80 \times 10^2$  N/C. ¿Cuánta carga hay en la esfera?

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** La distribución de carga es esféricamente simétrica. Como en los ejemplos 22.5 y 22.9, el campo eléctrico es radial en todas partes y su magnitud es función sólo de la distancia radial  $r$  respecto al centro de la esfera. Nuevamente se emplea una *superficie gaussiana* esférica concéntrica con la distribución de carga y que pasa por el punto de interés en  $r = 0.300$  m.

**EJECUTAR:** La distribución de carga es la misma que si la carga estuviera en la superficie de una esfera conductora con un radio de 0.250 m. Por tanto, podemos tomar prestados los resultados del ejemplo 22.5. Una diferencia clave con respecto a ese ejemplo es que, debido a que el campo eléctrico en este caso está dirigido hacia la esfera, la carga debe ser *negativa*. Además, puesto que la dirección del campo eléctrico es hacia adentro de la superficie gaussiana,  $E_{\perp} = -E$  y el flujo es  $\oint \vec{E}_{\perp} dA = -E(4\pi r^2)$ .

Por la ley de Gauss, el flujo es igual al cociente de la carga  $q$  de la esfera (toda la cual está encerrada por la superficie gaussiana) entre  $\epsilon_0$ . Despejando  $q$  se obtiene

$$\begin{aligned} q &= -E(4\pi\epsilon_0 r^2) = -(1.80 \times 10^2 \text{ N/C})(4\pi) \\ &\quad \times (8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.300 \text{ m})^2 \\ &= -8.01 \times 10^{-10} \text{ C} = -0.801 \text{ nC} \end{aligned}$$

**EVALUAR:** Para hallar la carga era preciso conocer el campo eléctrico en *todos* los puntos de la superficie gaussiana a fin de poder calcular la integral de flujo. Esto fue posible en este caso porque la distribución de carga es simétrica en alto grado. No obstante, cuan-

do la distribución de carga es irregular o carece de simetría, la ley de Gauss no es muy útil para calcular la distribución de carga a partir del campo, o viceversa.

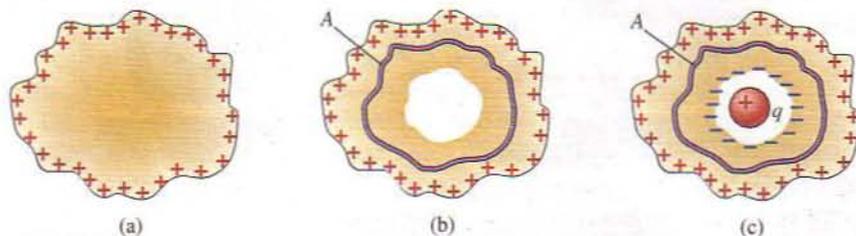
### Evalúe su comprensión

Se coloca una cantidad conocida de carga  $Q$  en el conductor de forma irregular que se muestra en la figura 22.17. Si se conoce el tamaño y la forma del conductor, ¿se puede utilizar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en una posición arbitraria externa al conductor?

## 22.5 | Cargas en conductores

Hemos ilustrado que en una situación electrostática (en la que no hay movimiento de carga neto) el campo eléctrico en todos los puntos interiores del conductor es cero, y que todo exceso de carga en un conductor sólido se encuentra en su totalidad en la superficie de éste (Fig. 22.24a). Pero, ¿qué ocurre si hay una *cavidad* adentro del conductor (Fig. 22.24b)? Si no hay carga adentro de la cavidad, se puede emplear una superficie gaussiana como  $A$  (que se encuentra íntegramente dentro del material del conductor) para demostrar que la carga *neta* en la *superficie de la cavidad* debe ser cero, porque  $\vec{E} = 0$  en cualquier lugar de la superficie gaussiana. De hecho, se puede probar que en esta situación no puede haber carga alguna en la superficie de la cavidad. Pospondremos la prueba en detalle de este enunciado hasta el capítulo 23.

Supóngase que se coloca un cuerpo pequeño con una carga  $q$  adentro de una cavidad en el interior de un conductor (Fig. 22.24c). El conductor no tiene carga y está aislado de la carga  $q$ . También en este caso  $\vec{E} = 0$  en cualquier lugar de la superficie  $A$ ; por tanto, de acuerdo con la ley de Gauss la carga *total* en el interior de esta superficie debe ser cero. Por consiguiente, debe haber una carga  $-q$  distribuida en la superficie de la cavidad, atraída hacia ella por la carga  $q$  del interior de la cavidad. La carga *total* del conductor debe seguir siendo cero; por tanto, debe aparecer una carga  $+q$  ya sea en su superficie externa o adentro del material. Pero en la sección 22.4 demostramos que en una situación electrostática no puede haber un exceso de carga dentro del material de un conductor. Por tanto, se concluye que la carga  $+q$  debe aparecer en la superficie externa. Por el mismo razonamiento, si el conductor tenía originalmente una carga  $q_c$ , entonces la carga total en la superficie externa debe ser  $q + q_c$  después de introducir la carga  $q$  en la cavidad.



**22.24** (a) En un conductor sólido la carga reside en su totalidad en la superficie externa. (b) Si no hay carga en el interior de la cavidad del conductor, la carga neta en la superficie de la cavidad es cero. (c) Si hay una carga  $q$  adentro de la cavidad, la carga total en la superficie de la cavidad es  $-q$ .

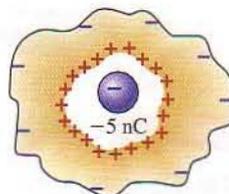
Ejemplo  
conceptual 22.11

## Conductor con una cavidad

El conductor que se muestra en corte transversal en la figura 22.25 tiene una carga total de  $+3 \text{ nC}$ . La carga en el interior de la cavidad, aislada del conductor, es de  $-5 \text{ nC}$ . ¿Cuánta carga hay en cada superficie (interna y externa) del conductor?

## SOLUCIÓN

Si la carga que está en la cavidad es  $q = -5 \text{ nC}$ , la carga en la superficie interna de la cavidad debe ser  $-q = -(-5 \text{ nC}) = +5 \text{ nC}$ . El conductor tiene una carga *total* de  $+3 \text{ nC}$ , nada de la cual está en el interior del material. Si hay  $+5 \text{ nC}$  en la superficie interna de la cavidad, entonces debe haber  $(+3 \text{ nC}) - (+5 \text{ nC}) = -2 \text{ nC}$  en la superficie externa del conductor.

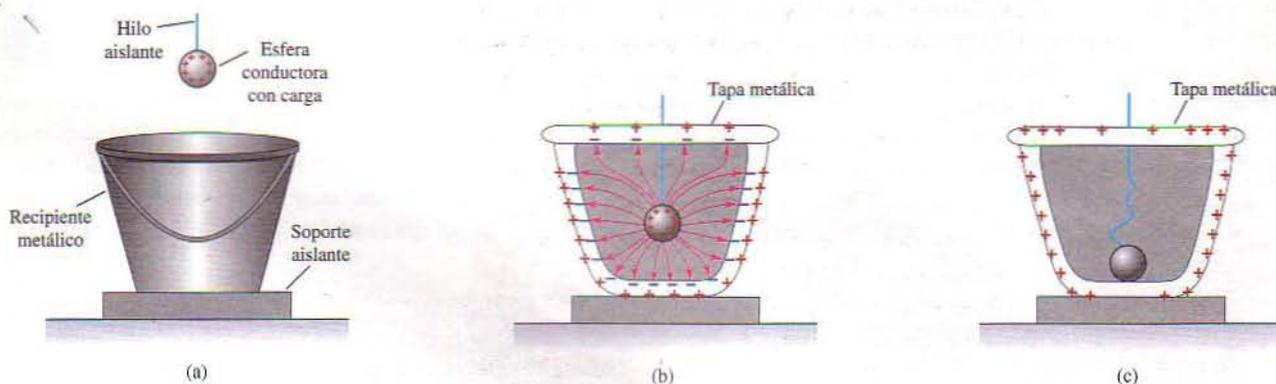


**22.25** No hay carga en exceso en el material del cuerpo de este conductor. La carga se encuentra sólo en las superficies interna y externa.

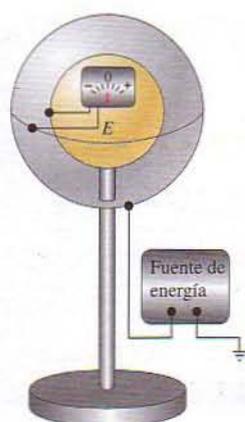
## Prueba experimental de la ley de Gauss

Ahora podemos examinar un experimento histórico, el cual se muestra en la figura 22.26. Se monta un recipiente conductor, como una cubeta metálica con tapa, sobre un soporte aislante. Inicialmente, el recipiente no tiene carga. Después se cuelga de un hilo aislante una esfera metálica con carga (Fig. 22.26a), se baja al interior de la cubeta y se coloca la tapa en su lugar (Fig. 22.26b). Se inducen cargas en las paredes de la cubeta, como se muestra. Enseguida se permite que la esfera *toque* la pared interior (Fig. 22.26c). La superficie de la esfera se convierte, en efecto, en parte de la superficie de la cavidad. La situación es ahora la misma que en la figura 22.24b; si la ley de Gauss es correcta, la carga neta en la superficie de la cavidad debe ser cero. Por tanto, la esfera debe perder toda su carga. Por último, se saca la esfera, y se encuentra que ha perdido efectivamente toda su carga.

Este experimento fue realizado en el siglo XIX por el científico inglés Michael Faraday, empleando un recipiente metálico para hielo con tapa, y se conoce como el **experimento del recipiente de hielo de Faraday**. (Benjamín Franklin en Norteamérica y Joseph Priestley en Inglaterra llevaron a cabo experimentos similares en el siglo XVIII, aunque con mucha menos precisión). El resultado confirma la validez de la ley



**22.26** (a) Esfera conductora con carga suspendida por un hilo aislante afuera de un recipiente conductor sobre un soporte aislante. (b) Se baja la esfera al interior del recipiente y se coloca la tapa. Se inducen cargas en las paredes del recipiente. (c) Cuando la esfera hace contacto con la superficie interna del recipiente, toda su carga se transfiere al recipiente y aparece en la superficie externa de éste.



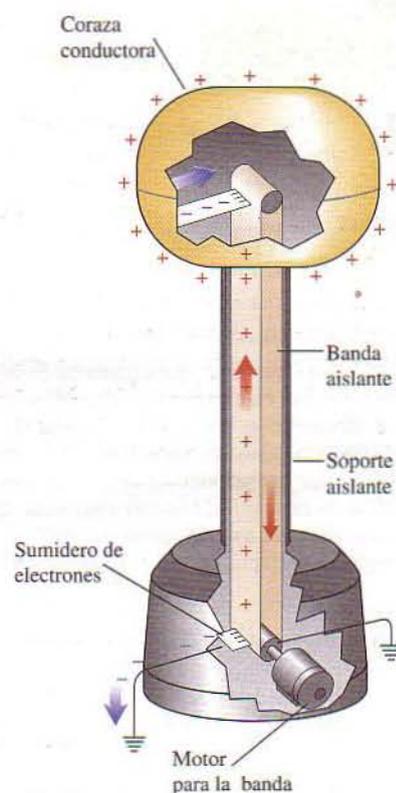
**22.27** La fuente de energía puede cargar y descargar alternadamente la coraza esférica exterior. Si hubiese algún flujo de carga entre las corazas interior y exterior, sería detectado por el electrómetro que está adentro de la coraza interior.

de Gauss y, por tanto, la ley de Coulomb. El resultado de Faraday fue importante porque el método experimental de Coulomb, que empleaba una balanza de torsión y dividía las cargas, no era muy preciso; es muy difícil confirmar con gran precisión la dependencia respecto a  $1/r^2$  de la fuerza electrostática por mediciones directas de fuerzas. En cambio, los experimentos como el de Faraday ponen a prueba la validez de la ley de Gauss y, por consiguiente, de la ley de Coulomb, con precisión mucho mayor.

En la figura 22.27 se muestra una versión moderna del experimento de Faraday. Los detalles de la caja marcada como “fuente de energía” no son importantes; su función es colocar carga en la esfera externa y quitarla, según se requiera. La caja interna con un cuadrante es un *electrómetro* sensible, un instrumento capaz de detectar el movimiento de cantidades extremadamente pequeñas de carga entre las esferas externa e interna. Si la ley de Gauss es correcta, nunca podrá haber carga en la superficie interna de la esfera externa. De ser así, no deberá haber flujo de carga entre las esferas cuando se está cargando o descargando la esfera externa. El hecho de que no se observa en efecto flujo alguno es una confirmación muy sensible de la ley de Gauss y, por tanto, de la ley de Coulomb. La precisión del experimento está limitada principalmente por el electrómetro, que puede ser asombrosamente sensible. Los experimentos han mostrado que el exponente 2 del cociente  $1/r^2$  de la ley de Coulomb no difiere de precisamente 2 en más de  $10^{-16}$ . Así pues, no hay razón para sospechar que no sea otra cosa que exactamente 2.

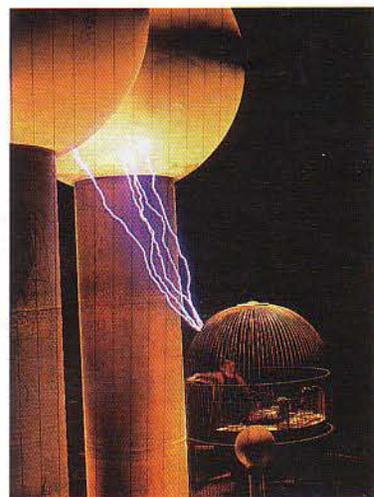
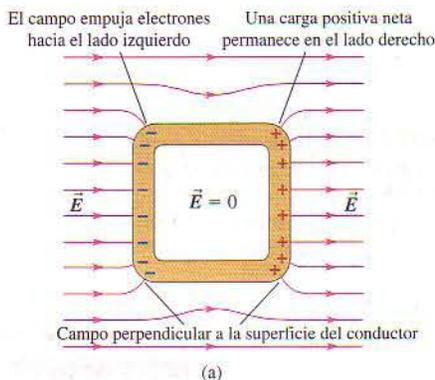
El mismo principio en el que se basa el experimento del recipiente de hielo de Faraday se utiliza en el *generador electrostático Van de Graaff* (Fig. 22.28). La esfera conductora con carga de la figura 22.26 se sustituye por una banda con carga que lleva carga continuamente al interior de un casco conductor, con el solo fin de que sea transportada a la superficie exterior del casco. Como resultado de esto, la carga del casco y el campo eléctrico que lo rodea pueden llegar a ser muy grandes con gran rapidez. El generador Van de Graaff se utiliza como acelerador de partículas con carga y para demostraciones de física.

Este principio también constituye la base del *blindaje electrostático*. Supóngase que se tiene un instrumento electrónico muy sensible que se desea proteger de campos eléctricos dispersos que podrían provocar mediciones erróneas. Se rodea el instrumento de una caja conductora, o se forran las paredes, el piso y el cielo raso de la habitación con material conductor, como placas de cobre, por ejemplo. El campo eléctrico externo redistribuye los electrones libres del conductor y deja una carga positiva neta en algunas regiones de la superficie externa y una carga negativa neta en otras (Fig. 22.29). Esta distribución de carga crea un campo eléctrico adicional tal que el campo



**22.28** Vista recortada de las partes fundamentales de un generador electrostático Van de Graaff. El sumidero de electrones de la parte inferior atrae electrones de la banda y le proporciona así una carga positiva; en la parte superior la banda atrae electrones de la coraza conductora y le imparte una carga positiva.

**22.29** (a) Caja conductora (jaula de Faraday) inmersa en un campo eléctrico uniforme. El campo de las cargas inducidas en la caja se combina con el campo uniforme para dar un campo total de cero en el interior de la caja. (b) El blindaje electrostático puede proteger a una persona de una descarga eléctrica peligrosa.



total en todos los puntos del interior de la caja es cero, como debe ser según la ley de Gauss. La distribución de carga en la caja también altera la forma de las líneas de campo cerca de la caja, como lo muestra la figura. A este tipo de sistema se le suele llamar *jaula de Faraday*. La misma física nos dice que uno de los lugares más seguros para estar durante una tormenta eléctrica es el interior de un automóvil; si un rayo cae en el automóvil, la carga tiende a permanecer en el armazón metálico del vehículo, y poco o ningún campo eléctrico se produce dentro del compartimiento de los pasajeros.

### Campo en la superficie de un conductor

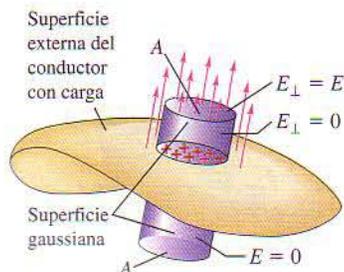
Por último, advertimos que existe una relación directa entre el campo  $\vec{E}$  en un punto inmediatamente afuera de cualquier conductor y la densidad superficial de carga  $\sigma$  en ese punto. En general,  $\sigma$  varía de un punto de la superficie a otro. En el capítulo 23 demostraremos que, en todo punto de este tipo, la dirección de  $\vec{E}$  siempre es *perpendicular* a la superficie (véase la Fig. 22.29a).

Para hallar una relación entre  $\sigma$  en cualquier punto de la superficie y la componente perpendicular del campo eléctrico en ese punto, se construye una superficie gaussiana con forma de un cilindro pequeño (Fig. 22.30). La cara de un extremo, de área  $A$ , se encuentra dentro del conductor, y la otra se halla inmediatamente afuera de él. El campo eléctrico es cero en todos los puntos del interior del conductor. Afuera del conductor la componente de  $\vec{E}$  perpendicular a las paredes laterales del cilindro es cero, y en toda la cara del extremo la componente perpendicular es igual a  $E_{\perp}$ . (Si  $\sigma$  es positiva, el campo eléctrico apunta hacia afuera del conductor y  $E_{\perp}$  es positiva; si  $\sigma$  es negativa, el campo apunta hacia adentro y  $E_{\perp}$  es negativa.) Por consiguiente, el flujo total a través de la superficie es  $E_{\perp}A$ . La carga encerrada dentro de la superficie gaussiana es  $\sigma A$ ; por tanto, por la ley de Gauss,

$$E_{\perp}A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (22.10)$$

(campo en la superficie de un conductor)

**22.30** El campo inmediatamente afuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie, y su componente perpendicular  $E_{\perp}$  es igual a  $\sigma/\epsilon_0$ .



Esto se comprueba con los resultados que hemos obtenido con superficies esféricas, cilíndricas y planas.

En el ejemplo 22.8 mostramos que la magnitud del campo entre dos placas conductoras planas infinitas con carga opuesta también es igual a  $\sigma/\epsilon_0$ . En este caso la magnitud del campo es la misma a *todas* las distancias respecto a las placas, pero en todos los demás casos la magnitud disminuye al aumentar la distancia respecto a la superficie.

### Ejemplo conceptual 22.12

## Campo en la superficie de una esfera conductora

Verifique la ecuación (22.10) de una esfera conductora de radio  $R$  y carga total  $q$ .

### SOLUCIÓN

En el ejemplo 22.5 (sección 22.4) se mostró que el campo eléctrico inmediatamente afuera de la superficie es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

La densidad superficial de carga es uniforme e igual al cociente de  $q$  entre el área superficial de la esfera:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Comparando estas dos expresiones, vemos que  $E = \sigma/\epsilon_0$ , como lo expresa la ecuación (22.10).

### Ejemplo 22.13

## Campo eléctrico de la Tierra

La Tierra (un conductor) tiene una carga eléctrica neta. El campo eléctrico resultante cerca de la superficie se puede medir con instrumentos electrónicos sensibles; su valor medio es de alrededor de 150 N/C, dirigido hacia el centro del planeta. a) ¿Cuál es la densidad superficial de carga correspondiente? b) ¿Cuál es la carga superficial *total* de la Tierra?

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Dado el campo eléctrico perpendicular, se determina la densidad superficial de carga  $\sigma$  con base en la ecuación (22.10). La carga superficial total de la Tierra es entonces el producto de  $\sigma$  por el área superficial de la Tierra.

**EJECUTAR:** a) Sabemos, por la dirección del campo, que  $\sigma$  es negativa (en concordancia con la dirección de  $\vec{E}$  que es *hacia adentro* de la superficie, por lo que  $E_{\perp}$  es negativa). De la ecuación (22.10),

$$\begin{aligned}\sigma &= \epsilon_0 E_{\perp} = (8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(-150 \text{ N/C}) \\ &= -1.33 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2 = -1.33 \text{ nC/m}^2\end{aligned}$$

b) El área superficial de la Tierra es  $4\pi R_T^2$ , donde  $R_T = 6.38 \times 10^6$  m es el radio de la Tierra (véase el apéndice F). La carga total  $Q$  es el producto  $4\pi R_T^2 \sigma$ , o

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi (6.38 \times 10^6 \text{ m})^2 (-1.33 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2) \\ &= -6.8 \times 10^5 \text{ C} = -680 \text{ kC}\end{aligned}$$

Resolviendo para  $Q$  se obtiene

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi\epsilon_0 R^2 E_{\perp} \\ &= \frac{1}{9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2} (6.38 \times 10^6 \text{ m})^2 (-150 \text{ N/C}) \\ &= -6.8 \times 10^5 \text{ C}\end{aligned}$$

La carga de un electrón es de  $-1.60 \times 10^{-19}$  C. Así pues, esta carga eléctrica negativa en exceso corresponde a la presencia de  $(-6.8 \times 10^5 \text{ C})/(-1.60 \times 10^{-19} \text{ C}) = 4.2 \times 10^{24}$  electrones en exceso en la Tierra, esto es, aproximadamente 7 moles de electrones en exceso. Esto se compensa por una *deficiencia* igual de electrones en las capas altas de la atmósfera terrestre, de modo que el conjunto de la Tierra y su atmósfera es eléctricamente neutro.

**EVALUAR:** Compruebe el resultado del inciso (b) con base en el resultado del ejemplo 22.5.

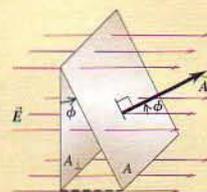
### Evalúe su comprensión

Los componentes de computadora sensibles se transportan a veces en recipientes eléctricamente conductores. ¿De qué modo protege esta práctica los componentes?

## RESUMEN

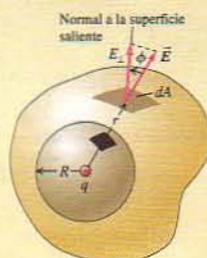
El flujo eléctrico es una medida del “flujo” de campo eléctrico a través de una superficie. Es igual al producto de un elemento de área por la componente perpendicular de  $\vec{E}$ , integrado con respecto a una superficie. (Véanse los ejemplos del 22.1 al 22.3).

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int E \cos \phi \, dA \\ &= \int E_{\perp} \, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}\end{aligned}\quad (22.5)$$



La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada, que se puede escribir como la integral de superficie de la componente de  $\vec{E}$  normal a la superficie, es igual al producto de una constante por la carga total  $Q_{\text{enc}}$  encerrada por la superficie. La ley de Gauss es equivalente lógicamente a la ley de Coulomb, pero su uso simplifica enormemente los problemas que presentan un alto grado de simetría. (Véanse los ejemplos del 22.4 al 22.10).

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint E \cos \phi \, dA \\ &= \oint E_{\perp} \, dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}\end{aligned}\quad (22.8), (22.9)$$



Cuando se coloca un exceso de carga en un conductor y la carga está en reposo, ésta reside en su totalidad en la superficie, y  $\vec{E} = \mathbf{0}$  en todas partes del material del conductor. (Véanse los ejemplos del 22.11 al 22.13).

Superficie gaussiana A  
adentro del conductor    Conductor  
(se muestra en corte transversal)    (se muestra en corte transversal)



La tabla siguiente es una lista de los campos eléctricos originados por varias distribuciones simétricas de carga. En la tabla,  $q$ ,  $Q$ ,  $\lambda$  y  $\sigma$  se refieren a las *magnitudes* de las cantidades.

| Distribución de carga   | Punto del campo eléctrico         | Magnitud del campo eléctrico                     |
|---|-----------------------------------|--|
| Carga puntual individual $q$                                    | Distancia $r$ respecto a $q$      | $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$     |
| Carga $q$ en la superficie de la esfera conductora de radio $R$ | Esfera exterior, $r > R$          | $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$     |
|   | Esfera interior, $r < R$          | $E = 0$  |
| Alambre infinito, carga por unidad de la longitud $\lambda$     | Distancia $r$ respecto al alambre | $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$ |

| Distribución de carga  | Punto del campo eléctrico        | Magnitud del campo eléctrico                     |
|--|----------------------------------|--|
| Cilindro conductor infinito de radio $R$ , carga por unidad de longitud $\lambda$                        | Cilindro exterior, $r > R$       | $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$ |
|  | Cilindro interior, $r < R$       | $E = 0$  |
| Esfera sólida aislante de radio $R$ , carga $Q$ distribuida uniformemente en todo el volumen             | Esfera exterior, $r > R$         | $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$     |
|  | Esfera interior, $r < R$         | $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}$    |
| Lámina infinita de carga, con carga uniforme por unidad de área $\sigma$                                 | Cualquier punto                  | $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$                 |
| Dos placas conductoras con cargas opuestas y con densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$ | Cualquier punto entre las placas | $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$                  |

### Términos clave

experimento del recipiente de hielo de Faraday, 857  
flujo eléctrico, 838

integral de superficie, 842  
ley de Gauss, 844

superficie cerrada, 837  
superficie gaussiana, 846

### Notas

## Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

No. El campo eléctrico en el interior de una cavidad situada dentro de un conductor es cero; por tanto la niña no experimenta efecto eléctrico alguno. (Véase la sección 22.5).

## Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

**Sección 22.1** Cada parte de la superficie de la caja estará tres veces más lejos de la carga  $+q$ ; por tanto, el campo eléctrico será  $1/3^2 = 1/9$  veces más intenso. En cambio, el área de la caja aumentará por un factor de  $3^2 = 9$ . Por consiguiente, el flujo eléctrico se multiplicará por un factor de  $(1/9)(9) = 1$ . En otras palabras, el flujo no cambia.

**Sección 22.2** Para aumentar al máximo el flujo eléctrico a través de una superficie plana, el área vectorial  $\vec{A}$  debe tener la misma dirección que el campo eléctrico  $\vec{E}$  de modo que su superficie esté de cara al campo (Fig. 22.6a). De modo análogo, la orientación de un panel solar se elige de forma tal que aumente al máximo el flujo lumínico, a fin de que incida en el panel la mayor cantidad posible de energía solar.

**Sección 22.3** De acuerdo con la ecuación (22.9) el flujo total a través de la superficie es igual a  $Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$ . Un ion litio negativo tiene una carga de  $-e = -1.60 \times 10^{-19}$  C; por tanto,  $\Phi_E = (-1.60 \times 10^{-19} \text{ C}) / (8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2) = -1.81 \times 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ . El flujo es negativo porque la carga encerrada es negativa y el campo eléctrico está dirigido hacia el ion. Un aumento de tamaño de la superficie gaussiana no influye en el flujo porque la carga encerrada no cambia.

**Sección 22.4** No. Uno se podría sentir tentado a dibujar una superficie gaussiana que fuese una versión ampliada del conductor, con la misma forma y colocada de tal forma que encierre totalmente el conductor. Aunque se conoce el flujo a través de esta superficie gaussiana (por la ley de Gauss, es  $\Phi_E = Q/\epsilon_0$ ), la dirección del campo eléctrico no es necesariamente perpendicular a la superficie, ni la magnitud del campo es forzosamente la misma en todos los puntos de la superficie. No es posible efectuar la integral de flujo  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ , y no se puede calcular el campo eléctrico. La ley de Gauss permite calcular el campo eléctrico sólo cuando la distribución de carga tiene un alto grado de simetría.

**Sección 22.5** Los componentes de computadora son proyectados para funcionar con cantidades muy pequeñas de corriente eléctrica. Si se exponen a campos eléctricos intensos, el flujo de carga en el interior de los componentes podría exceder los límites de diseño y provocar daños. El transporte de estos componentes en una caja conductora los protege de cualquier campo eléctrico que pudiesen encontrar en el trayecto (véase la Fig. 22.29).

## Preguntas para análisis

**P22.1** Una superficie gaussiana esférica encierra una carga puntual  $q$ . Si la carga puntual se desplaza del centro de la esfera a un punto alejado del centro, ¿cambia el campo eléctrico en un punto de la superficie? ¿Cambia el flujo total a través de la superficie gaussiana? Explique su respuesta.

**P22.2** Cierta región del espacio limitada por una superficie cerrada imaginaria no contiene carga. ¿Es el campo eléctrico siempre cero en todas las partes de la superficie? Si no lo es, ¿en qué circunstancias es cero en la superficie?

**P22.3** Un globo de caucho tiene una sola carga puntual en su interior. ¿Depende el flujo eléctrico a través del globo de que éste se encuentre totalmente inflado o no? Explique su razonamiento.

**P22.4** ¿La ley de Coulomb y la ley de Gauss son totalmente equivalentes? ¿Hay alguna situación de tipo electrostático en la que una sea válida y la otra no? Explique su razonamiento.

**P22.5** En la figura 22.16, suponga que se coloca una tercera carga puntual afuera de la superficie gaussiana amarilla  $C$ . ¿Influiría esto en el flujo eléctrico a través de alguna de las superficies  $A$ ,  $B$ ,  $C$  o  $D$  de la figura? ¿Por qué?

**P22.6** Si el campo eléctrico de una carga puntual fuese proporcional a  $1/r^3$  en vez de  $1/r^2$ , ¿seguiría siendo válida la ley de Gauss? Explique su razonamiento. (Sugerencia: Considera una superficie gaussiana esférica centrada en una sola carga puntual).

**P22.7** Un cilindro regular sólido de radio  $R$  y altura  $h = R$  tiene carga distribuida uniformemente en todo su volumen. ¿Se puede usar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en todos los puntos del interior del cilindro? ¿Y de los puntos situados afuera del cilindro? Explique su razonamiento.

**P22.8** Se demostró en el texto que el campo eléctrico en el interior de una cavidad vacía de un conductor es cero. ¿Es cierta esta aseveración cualquiera que sea la forma de la cavidad? ¿Por qué?

**P22.9** El campo eléctrico  $\vec{E}$  es uniforme en todos los puntos de cierta región del espacio. Se introduce luego en esta región una esfera conductora pequeña con una carga neta  $Q$ . ¿Cuál es el campo eléctrico en el interior de la esfera? Explique su razonamiento.

**P22.10** En un conductor, uno o más electrones de cada átomo tienen libertad para vagar por todo el volumen del conductor. ¿Contradice esto la aseveración de que todo exceso de carga en un conductor sólido debe residir en la superficie de éste? ¿Por qué?

**P22.11** Explique el enunciado siguiente: "En una situación estática, el campo eléctrico en la superficie de un conductor no puede tener una componente paralela a la superficie, porque esto violaría la condición de que las cargas de la superficie están en reposo". ¿Sería válido este mismo enunciado con respecto al campo eléctrico en la superficie de un aislador? Explique su respuesta y la razón de cualesquier diferencias entre los casos de un conductor y un aislador.

**P22.12** La magnitud de  $\vec{E}$  en la superficie de un conductor sólido de forma irregular debe ser máxima en las regiones donde la superficie se curva más abruptamente, como en el punto  $A$  de la figura 22.31, y debe ser mínima en las regiones planas como el punto  $B$  de la misma figura. Explique por qué debe ser así, considerando cómo es preciso que las líneas de campo eléctrico estén dispuestas cerca de una superficie conductora. ¿Cómo se comparan las densidades de carga superficial en los puntos  $A$  y  $B$ ? Explique.

**P22.13** Un pararrayos es una varilla de cobre con punta, montada en lo alto de un edificio y soldada a un cable grueso de cobre que baja y penetra en el suelo. Los pararrayos protegen los edificios, las casas y los graneros de los rayos; la corriente del rayo fluye por el cobre en vez de hacerlo a través del edificio. ¿Por qué? ¿Por qué debe tener punta el extremo de la varilla? (Sugerencia: La respuesta a P22.12 puede serle útil).

**P22.14** Un conductor sólido tiene una cavidad en su interior. ¿Influiría la presencia de una carga puntual dentro de la cavidad en el campo eléctrico afuera del conductor? ¿Por qué? ¿Influiría la presencia de una carga puntual afuera del conductor en el campo eléctrico del interior de la cavidad? ¿Por qué?

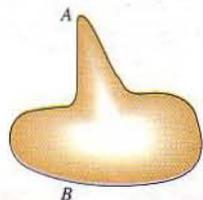


Figura 22.31 Pregunta P22.12.

**P22.15** Ciertos aviones modernos están hechos principalmente de materiales compuestos que no conducen la electricidad. La U.S. Federal Aviation Administration exige que estos aviones tengan alambres conductores incrustados en su superficie, los cuales ofrecen protección al volar cerca de las tormentas eléctricas. Explique la física en la que se basa este requisito.

**P22.16** Usted encuentra una caja herméticamente cerrada a la puerta de su casa, y sospecha que contiene varias esferas metálicas con carga empacadas en material aislante. ¿Cómo puede conocer la carga neta total que hay dentro de la caja sin abrir ésta? ¿O no es posible?

**P22.17** Una esfera sólida de cobre tiene una carga positiva neta. La carga está distribuida uniformemente en la superficie de la esfera y el campo eléctrico en el interior de la esfera es cero. Luego se acerca a la superficie de la esfera una carga puntual negativa externa a la esfera. ¿Se mantiene toda la carga neta de la esfera todavía en su superficie? De ser así, ¿continúa distribuida uniformemente en toda la superficie? Si no es uniforme, ¿cómo está distribuida? ¿Sigue siendo cero el campo eléctrico en el interior de la esfera? Justifique sus respuestas en todos los casos.

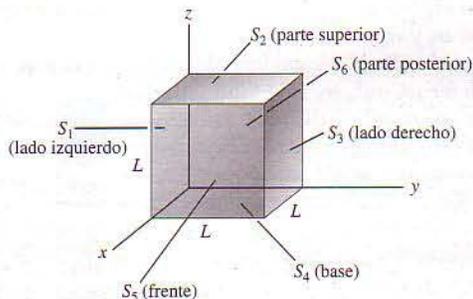
## Ejercicios

### Sección 22.2 Cálculo del flujo eléctrico

**22.1** Una hoja plana de papel con un área de  $0.250 \text{ m}^2$  está orientada de modo tal que la normal a la hoja forma un ángulo de  $60^\circ$  con un campo eléctrico uniforme cuya magnitud es de  $14 \text{ N/C}$ . a) Halle la magnitud del flujo eléctrico a través de la hoja. b) ¿Depende su respuesta al inciso (a) de la forma de la hoja? ¿Por qué? c) ¿Con qué ángulo  $\phi$  entre la normal a la hoja y el campo eléctrico es la magnitud del flujo a través de la hoja i) máxima? ii) mínima? Explique sus respuestas.

**22.2** Los lados del cubo de la figura 22.32 tienen una longitud  $L = 10.0 \text{ cm}$ . El campo eléctrico es uniforme, su magnitud es  $E = 4.00 \times 10^3 \text{ N/C}$ , y es paralelo al plano  $xy$  con un ángulo de  $36.9^\circ$  medido desde el eje de las  $+x$  hacia el eje de las  $+y$ . a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  y  $S_6$ ? b) ¿Cuál es el flujo eléctrico total a través de todas las caras del cubo?

**22.3** Un cubo tiene lados de longitud  $L$ . Está colocado con un vértice en el origen como se muestra en la figura 22.32. El campo eléctrico

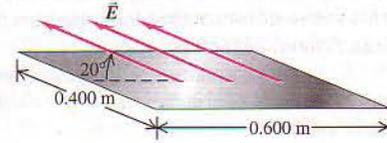


**Figura 22.32** Ejercicios 22.2 y 22.23 y problema 22.30.

trico es uniforme y está dado por  $\vec{E} = -B\hat{i} + C\hat{j} - D\hat{k}$ , donde  $B, C$  y  $D$  son constantes positivas. a) Halle el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  y  $S_6$ . b) Halle el flujo eléctrico a través de todo el cubo.

**22.4** Una lámina plana tiene forma rectangular, con lados cuya longitud es de  $0.400 \text{ m}$  y  $0.600 \text{ m}$ . Se introduce la lámina en un campo

eléctrico uniforme con una magnitud de  $75.0 \text{ N/C}$  y cuya dirección forma un ángulo de  $20^\circ$  con respecto al plano de la lámina (Fig. 22.33). Halle la magnitud del flujo eléctrico a través de la lámina.

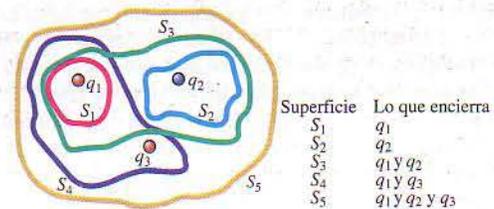


**Figura 22.33** Ejercicio 22.4.

**22.5** En el ejemplo 21.11 (sección 21.5) se demostró que el campo eléctrico debido a una línea infinita de carga es perpendicular a la línea y su magnitud es  $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$ . Considere un cilindro imaginario de radio  $r = 0.250 \text{ m}$  y longitud  $l = 0.400 \text{ m}$  que tiene una línea infinita con carga positiva dirigida a lo largo de su eje. La carga por unidad de longitud de la recta es  $\lambda = 6.00 \mu\text{C/m}$ . a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del cilindro debido a esta línea infinita con carga? b) ¿Cuál es el flujo a través del cilindro si su radio aumenta a  $r = 0.500 \text{ m}$ ? c) ¿Cuál es el flujo a través del cilindro si su longitud aumenta a  $l = 0.800 \text{ m}$ ?

### Sección 22.3 Ley de Gauss

**22.6** Las tres esferas pequeñas que se muestran en la figura 22.34 tienen cargas  $q_1 = 4.00 \text{ nC}$ ,  $q_2 = -7.80 \text{ nC}$  y  $q_3 = 2.40 \text{ nC}$ . Halle el flujo eléctrico neto a través de cada una de las superficies cerradas siguientes, las cuales se muestran en corte transversal en la figura: a)  $S_1$ ; b)  $S_2$ ; c)  $S_3$ ; d)  $S_4$ ; e)  $S_5$ . f) ¿Dependen sus respuestas a los incisos del (a) al (e) de cómo está distribuida la carga en cada esfera pequeña? ¿Por qué?



**Figura 22.34** Ejercicio 22.6.

**22.7** a) Una superficie cerrada contiene una carga neta de  $-3.60 \mu\text{C}$ . ¿Cuál es el flujo eléctrico neto a través de la superficie? b) El flujo eléctrico a través de la superficie cerrada resulta ser de  $780 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$ . ¿Qué cantidad de carga encierra la superficie? c) La superficie cerrada del inciso (b) es un cubo con lados de  $2.50 \text{ cm}$  de longitud. Con base en la información dada en el inciso (b), ¿es posible saber dónde está la carga dentro del cubo? Explique su respuesta.

**22.8** Una carga puntual  $q_1 = 4.00 \text{ nC}$  está situada sobre el eje de las  $x$  en  $x = 2.00 \text{ m}$ , y una segunda carga puntual  $q_2 = -6.00 \text{ nC}$  está sobre el eje de las  $y$  en  $y = 1.00 \text{ m}$ . ¿Cuál es el flujo eléctrico total debido a estas dos cargas puntuales a través de una superficie esférica centrada en el origen y con un radio de a)  $0.500 \text{ m}$ ? b)  $1.50 \text{ m}$ ? c)  $2.50 \text{ m}$ ?

**22.9** En cierta región del espacio el campo eléctrico  $\vec{E}$  a) es uniforme. Utilice la ley de Gauss y verifique que esta región de espacio debe ser eléctricamente neutra; es decir, la densidad volumétrica de carga  $\rho$  debe ser cero. b) ¿Es cierta esta aseveración a la inversa; es decir, que en una región del espacio donde no hay carga  $\vec{E}$  debe ser uniforme? Explique su respuesta.

**22.10** a) En cierta región del espacio la densidad de carga volumétrica  $\rho$  tiene un valor positivo uniforme. ¿Puede ser  $\vec{E}$  uniforme en esta región? Explique su respuesta. b) Suponga que en esta región de  $\rho$  positiva uniforme hay una "burbuja", dentro de la cual  $\rho = 0$ . ¿Puede ser  $\vec{E}$  uniforme dentro de esta burbuja? Explique su respuesta.

**22.11** Una carga puntual de  $9.60 \mu\text{C}$  está en el centro de un cubo con lados de  $0.500 \text{ m}$  de longitud. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una de las seis caras del cubo? b) ¿Cómo cambiaría su respuesta al inciso (a) si los lados fueran de  $0.250 \text{ m}$  de longitud? Explique su respuesta.

**22.12** Un cubo pequeño con un volumen de  $8.0 \text{ cm}^3$  está a  $0.30 \text{ cm}$  de una esfera metálica que tiene una carga de  $2.00 \mu\text{C}$ . Si el cubo está vacío, ¿cuál es el flujo total a través de él?

**22.13** Una esfera centrada en el origen tiene un radio de  $0.200 \text{ m}$ . Una carga puntual de  $-5.00 \mu\text{C}$  está sobre el eje de las  $x$  en  $x = 0.300 \text{ m}$ . El flujo neto a través de la esfera es de  $360 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ . ¿Cuál es la carga total en el interior de la esfera?

### Sección 22.4 Aplicaciones de la ley de Gauss y

#### Sección 22.5 Cargas en conductores

**22.14** Una esfera metálica sólida con un radio de  $0.450 \text{ m}$  tiene una carga neta de  $0.250 \text{ nC}$ . Halle la magnitud del campo eléctrico a) en un punto situado a  $0.100 \text{ m}$  afuera de la superficie de la esfera; b) en un punto dentro de la esfera, a  $0.100 \text{ m}$  abajo de la superficie.

**22.15** En una demostración de clase de física se coloca una carga de  $-0.180 \mu\text{C}$  en el domo esférico de un generador Van de Graaff. a) ¿A qué distancia del centro del domo se debe sentar usted para que el campo eléctrico en ese punto no exceda el máximo recomendado de  $614 \text{ N/C}$  (ejercicio 21.38)? b) La respuesta al inciso (a) no depende del radio del domo. ¿Por qué?

**22.16** El tambor cilíndrico formador de imágenes de una fotocopiadora debe tener, inmediatamente afuera de su superficie, un campo eléctrico de  $1.40 \times 10^5 \text{ N/C}$ . a) Si el tambor tiene un área superficial de  $0.0610 \text{ m}^2$  (el área de una hoja de papel de  $8\frac{1}{2} \times 11$  pulg.), ¿cuál debe ser la cantidad total de carga que reside en la superficie del tambor? b) Si se aumenta el área superficial del tambor a  $0.122 \text{ m}^2$  para poder usar hojas de papel más grandes, ¿qué cantidad total de carga se requiere para producir el mismo campo eléctrico de  $1.40 \times 10^5 \text{ N/C}$  inmediatamente arriba de la superficie?

**22.17** ¿Cuántos electrones en exceso se deben agregar a un conductor esférico aislado de  $32.0 \text{ cm}$  de diámetro para producir un campo eléctrico de  $1150 \text{ N/C}$  inmediatamente afuera de su superficie?

**22.18** El campo eléctrico a  $0.400 \text{ m}$  de una línea con carga uniforme y muy larga es de  $840 \text{ N/C}$ . ¿Cuánta carga hay en una sección de  $2.00 \text{ cm}$  de la línea?

**22.19** Una línea con carga uniforme y muy larga tiene una carga en cada unidad de longitud de  $4.80 \mu\text{C}/\text{m}$  y yace a lo largo del eje de las  $x$ . Una segunda línea con carga uniforme y larga tiene una carga en cada unidad de longitud de  $-2.40 \mu\text{C}/\text{m}$  y es paralela al eje de las  $x$  en  $y = 0.400 \text{ m}$ . ¿Cuál es el campo eléctrico neto (magnitud y dirección) en los puntos siguientes del eje de las  $y$ : a)  $y = 0.200 \text{ m}$ , b)  $y = 0.600 \text{ m}$ ?

**22.20** a) A una distancia de  $0.200 \text{ cm}$  del centro de una esfera conductora con carga cuyo radio es de  $0.100 \text{ cm}$ , el campo eléctrico es de  $480 \text{ N/C}$ . ¿Cuál es el campo eléctrico a  $0.600 \text{ cm}$  del centro de la esfera? b) A una distancia de  $0.200 \text{ cm}$  del eje de un cilindro conductor muy largo con carga, cuyo radio es de  $0.100 \text{ cm}$ , el campo eléctrico es de  $480 \text{ N/C}$ . ¿Cuál es el campo eléctrico a  $0.600 \text{ cm}$  del eje del cilindro? c) A una distancia de  $0.200 \text{ cm}$  de una lámina con carga grande y uniforme, el campo eléctrico es de  $480 \text{ N/C}$ . ¿Cuál es el campo eléctrico a  $1.20 \text{ cm}$  desde la lámina?

**22.21** Dos esferas aislantes de  $0.080 \text{ m}$  de radio están separadas por una distancia de centro a centro de  $0.500 \text{ m}$ . Una esfera tiene una carga neta de  $-1.80 \mu\text{C}$ , y la otra, una carga de  $+3.80 \mu\text{C}$ . La carga está distribuida uniformemente dentro del volumen de cada esfera. ¿Cuál es el campo eléctrico (magnitud y dirección) a medio camino entre las esferas?

**22.22** Una esfera aislante con un radio de  $0.150 \text{ m}$  tiene una densidad de carga uniforme de  $7.50 \text{ nC}/\text{m}^3$  en todo su volumen. ¿Cuál es el campo eléctrico a) inmediatamente afuera de la superficie de la esfera; b) afuera de la esfera, a  $0.300 \text{ m}$  de su centro; c) en el interior de la esfera, a  $0.075 \text{ m}$  de su centro?

**22.23** Una esfera aislante de  $0.220 \text{ m}$  de radio tiene carga distribuida uniformemente en todo su volumen. ¿Cuál es la carga total de la esfera si el campo eléctrico a  $0.110 \text{ m}$  del centro de la esfera es de  $950 \text{ N/C}$ ?

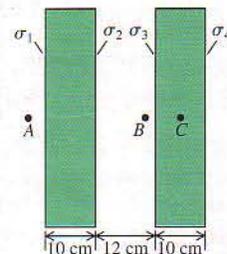
**22.24** Un conductor con una cavidad interior como la que se muestra en la figura 22.24c tiene una carga total de  $+5.00 \text{ nC}$ . La carga en el interior de la cavidad, aislada del conductor, es de  $-6.00 \text{ nC}$ . ¿Cuánta carga hay en a) la superficie interna del conductor? b) la superficie externa del conductor?

**22.25** Aplique la ley de Gauss a las superficies gaussianas  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$  de la figura 22.22b para calcular el campo eléctrico entre y afuera de las placas.

**22.26** Se mantiene en posición horizontal una lámina cuadrada aislante de  $80.0 \text{ cm}$  en cada lado. La lámina tiene  $7.50 \text{ nC}$  de carga distribuida uniformemente en toda su área. a) Calcule el campo eléctrico en un punto a  $0.100 \text{ mm}$  por encima del centro de la lámina. b) Estime el campo eléctrico en un punto a  $100 \text{ m}$  por encima del centro de la lámina. c) ¿Serían diferentes las respuestas a los incisos (a) y (b) si la lámina fuera de un material conductor? ¿Por qué?

**22.27** Un conductor cilíndrico infinitamente largo tiene un radio  $R$  y una densidad de carga superficial uniforme  $\sigma$ . a) En términos de  $\sigma$  y  $R$ , ¿cuál es la carga en cada unidad de longitud  $\lambda$  del cilindro? b) En términos de  $\sigma$ , ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico que produce el cilindro con carga a una distancia  $r > R$  de su eje? c) Exprese el resultado del inciso (b) en términos de  $\lambda$  y muestre que el campo eléctrico afuera del cilindro es el mismo que si toda la carga estuviera en el eje. Compare su resultado con el correspondiente a una línea con carga del ejemplo 22.6 (sección 22.4).

**22.28** Dos láminas grandes de plástico, no conductoras, cada una con un espesor de  $10.0 \text{ cm}$ , tienen densidades de carga uniformes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  y  $\sigma_4$  en sus superficies, como se muestra en la figura 22.35. Los valores de estas densidades superficiales de carga son  $\sigma_1 = -6.00 \mu\text{C}/\text{m}^2$ ,  $\sigma_2 = +5.00 \mu\text{C}/\text{m}^2$ ,  $\sigma_3 = +2.00 \mu\text{C}/\text{m}^2$  y  $\sigma_4 = +4.00 \mu\text{C}/\text{m}^2$ . Utilice la ley de Gauss, para hallar la magnitud y dirección del campo eléctrico en los puntos siguientes, alejados de los bordes de estas láminas. a) Punto A, a  $5.00 \text{ cm}$  de la cara izquierda de la lámina de la izquierda. b) Punto B, a  $1.25 \text{ cm}$  de la superficie interna de la lámina de la derecha. c) Punto C, en medio de la lámina de la derecha.



**Figura 22.35** Ejercicio 22.28.

**22.29** Se coloca una carga negativa  $-Q$  en el interior de la cavidad de un sólido metálico hueco. El exterior del sólido está conectado a tierra mediante un alambre conductor que va del sólido al suelo.

a) ¿Se induce algún exceso de carga en la superficie interna del objeto de metal? De ser así, halle su signo y magnitud. b) ¿Hay algún exceso de carga en el exterior del objeto de metal? ¿Por qué? c) ¿Hay un campo eléctrico en la cavidad? Explique su respuesta. d) ¿Hay un campo eléctrico dentro del metal? ¿Por qué? ¿Hay un campo eléctrico afuera del objeto de metal? Explique por qué. e) ¿Alguien en el exterior del sólido mediría un campo eléctrico debido a la carga  $-Q$ ? ¿Es razonable afirmar que el conductor conectado a tierra ha *blindado* la región contra los efectos de la carga  $-Q$ ? En principio, ¿se podría hacer lo mismo respecto a la gravedad? ¿Por qué?

**Problemas**

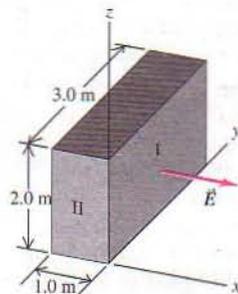
**22.30** Un cubo con lados de longitud  $L = 0.300$  m está colocado con un vértice en el origen, como se muestra en la figura 22.32. El campo eléctrico no es uniforme, sino que está dado por  $\vec{E} = (-5.00 \text{ N/C} \cdot \text{m})x\hat{i} + (3.00 \text{ N/C} \cdot \text{m})z\hat{k}$ . a) Halle el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  y  $S_6$ . b) Halle la carga eléctrica total en el interior del cubo.

**22.31** Una superficie cuadrada plana con lados de longitud  $L$  se describe mediante las ecuaciones

$$x = L \quad 0 \leq y \leq L \quad 0 \leq z \leq L$$

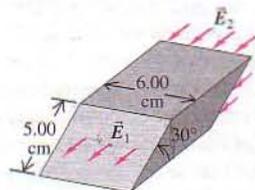
a) Dibuje este cuadrado mostrando los ejes  $x, y$  y  $z$ . b) Halle el flujo eléctrico a través del cuadrado debido a una carga puntual positiva  $q$  situada en el origen ( $x = 0, y = 0, z = 0$ ). (Sugerencia: Piense en el cuadrado como en parte de un cubo centrado en el origen).

**22.32** El campo eléctrico  $\vec{E}$  de la figura 22.36 es paralelo en su totalidad al eje  $x$ ; por tanto, las componentes  $E_y$  y  $E_z$  son cero. La componente  $x$  del campo  $E_x$  depende de  $x$  pero no de  $y$  ni de  $z$ . En puntos situados en el plano  $xy$  (donde  $x = 0$ ),  $E_x = 125 \text{ N/C}$ . a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie I de la figura 22.36? b) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie II? c) El volumen que se muestra en la figura es una pequeña sección de una placa aislante muy grande de 1.0 m de espesor. Si hay una carga total de  $-24.0 \text{ nC}$  dentro del volumen que se muestra, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de  $\vec{E}$  en la cara opuesta a la superficie I? d) ¿Es producido el campo eléctrico sólo por cargas situadas dentro de la placa, o se debe también a cargas que se encuentran afuera de la placa? ¿Cómo se podría saber?



**Figura 22.36** Problema 22.32.

**22.33** El campo eléctrico  $\vec{E}_1$  en una cara de un paralelepípedo es uniforme en toda la cara y su dirección es hacia afuera de la cara. En la cara opuesta, el campo eléctrico  $\vec{E}_2$  también es uniforme en toda la cara y se dirige hacia esa cara (Fig. 22.37). Las dos caras en cuestión están inclinadas formando un ángulo de  $30.0^\circ$  con respecto a la horizontal, en tanto que  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  son ambos horizonta-



**Figura 22.37** Problema 22.33.

les; la magnitud de  $\vec{E}_1$  es de  $2.50 \times 10^4 \text{ N/C}$ , y la de  $\vec{E}_2$  de  $7.00 \times 10^4 \text{ N/C}$ . a) Suponiendo que no hay más líneas de campo eléctrico que crucen las superficies del paralelepípedo, determine la carga neta contenida en su interior. b) ¿Se debe el campo eléctrico sólo a las cargas del interior del paralelepípedo, o se debe también a cargas situadas en el exterior del paralelepípedo? ¿Cómo se podría saber?

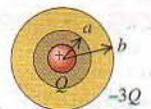
**22.34** Una línea larga que tiene una densidad lineal de carga uniforme de  $+50.0 \mu\text{C/m}$  es paralela a 10.0 cm de la superficie de una gran lámina plana de plástico que tiene una densidad superficial de carga uniforme de  $-100 \mu\text{C/m}^2$  por un lado. Halle la ubicación de todos los puntos donde una partícula  $\alpha$  no experimentaría fuerza alguna debida a este arreglo de objetos con carga.

**22.35** Una esfera aislante de 0.120 m de radio tiene 0.900 nC de carga distribuida en todo su volumen. El centro de la esfera está a 0.240 m arriba de una gran lámina uniforme con una densidad de carga de  $-8.00 \text{ nC/m}^2$ . Halle todos los puntos del interior de la esfera donde el campo eléctrico sea cero. O bien, demuestre que no existen puntos con esta característica.

**22.36** Una esfera en una esfera. Una esfera conductora sólida con una carga  $q$  tiene un radio  $a$ . Está adentro de una esfera conductora hueca concéntrica con radio interior  $b$  y radio exterior  $c$ . La esfera hueca no tiene carga neta. a) Deduzca expresiones de la magnitud del campo eléctrico en términos de la distancia  $r$  desde el centro para las regiones  $r < a, a < r < b, b < r < c$  y  $r > c$ . b) Grafique la magnitud del campo eléctrico en función de  $r$  de  $r = 0$  a  $r = 2c$ . c) ¿Cuál es la carga de la superficie interna de la esfera hueca? d) ¿Y en la superficie externa? e) Represente la carga de la esfera pequeña mediante cuatro signos de más. Dibuje las líneas de campo del sistema dentro de un volumen esférico de radio  $2c$ .

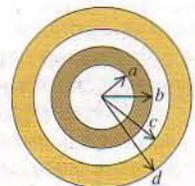
**22.37** Una esfera conductora sólida de radio  $R$ , que tiene una carga positiva  $Q$ , es concéntrica con una coraza aislante muy delgada de radio  $2R$  que también tiene una carga  $Q$ . La carga  $Q$  está distribuida uniformemente en toda la coraza aislante. a) Halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada una de las regiones  $0 < r < R, R < r < 2R$  y  $r > 2R$ . b) Grafique la magnitud del campo eléctrico en función de  $r$ .

**22.38** Una coraza conductora esférica de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$  tiene una carga puntual positiva  $Q$  en su centro. La carga total de la coraza es  $-3Q$ , y está aislada de su entorno (Fig. 22.38). a) Deduzca expresiones de la magnitud del campo eléctrico en términos de la distancia  $r$  desde el centro correspondientes a las regiones  $r < a, a < r < b$  y  $r > b$ . b) ¿Cuál es la densidad de carga superficial en la superficie interior de la coraza conductora? c) ¿Cuál es la densidad superficial de carga en la superficie exterior de la coraza conductora? d) Dibuje las líneas de campo eléctrico y la ubicación de todas las cargas. e) Grafique la magnitud del campo eléctrico en función de  $r$ .



**Figura 22.38** Problema 22.38.

**22.39** Corazas esféricas concéntricas. Una coraza esférica conductora pequeña de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$  es concéntrica con una coraza esférica conductora grande de radio interior  $c$  y radio exterior  $d$  (Fig. 22.39). La coraza interior tiene



**Figura 22.39** Problemas 22.39, 22.40, 22.41 y 22.44.

una carga total  $+2q$ , y la coraza exterior, una carga  $+4q$ . a) Calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en términos de  $q$  y de la distancia  $r$  respecto al centro común de las dos corazas cuando i)  $r < a$ ; ii)  $a < r < b$ ; iii)  $b < r < c$ ; iv)  $c < r < d$ ; v)  $r > d$ . Muestre sus resultados en una gráfica de la componente radial de  $\vec{E}$  en función de  $r$ . b) ¿Cuál es la carga total de i) la superficie interna de la coraza pequeña; ii) la superficie externa de la coraza pequeña; iii) la superficie interna de la coraza grande; iv) la superficie externa de la coraza grande?

**22.40** Repita el problema 22.39, pero ahora con una carga  $-2q$  en la coraza exterior. Como en el problema 22.39, la coraza interior tiene una carga  $+2q$ .

**22.41** Repita el problema 22.39, pero ahora con una carga  $-4q$  en la coraza exterior. Como en el problema 22.39, la coraza interior tiene una carga  $+2q$ .

**22.42** Una esfera conductora sólida de radio  $R$  tiene una carga positiva total  $Q$ . La esfera está rodeada de la coraza aislante de radio interior  $R$  y radio exterior  $2R$ . La coraza aislante tiene una densidad de carga uniforme  $\rho$ . a) Halle el valor de  $\rho$  de modo que la carga neta del sistema en conjunto sea cero. b) Si  $\rho$  tiene el valor obtenido en el inciso (a), halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada una de las regiones  $0 < r < R$ ,  $R < r < 2R$  y  $r > 2R$ . Muestre sus resultados en una gráfica de la componente radial de  $\vec{E}$  en función de  $r$ . c) Como regla general, el campo eléctrico sólo es discontinuo en los puntos donde hay una lámina delgada con carga. Explique de qué modo sus resultados del inciso (b) concuerdan con esta regla.

**22.43** La carga negativa  $-Q$  está distribuida uniformemente en toda la superficie de una coraza esférica delgada aislante de radio  $R$ . Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que la coraza de una coraza esférica delgada aislante ejerce sobre una carga puntual positiva  $q$  situada a) a una distancia  $r > R$  del centro de la coraza (afuera de la coraza); b) a una distancia  $r < R$  del centro de la coraza (adentro de la coraza).

**22.44** Una coraza esférica aislante pequeña, con radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ , es concéntrica con una coraza esférica aislante más grande  $d$  de radio interior  $c$  y radio exterior  $d$  (Fig. 22.39). La coraza interior tiene una carga total  $+q$  distribuida uniformemente en todo su volumen, y la coraza exterior tiene una carga  $-q$  distribuida uniformemente en todo su volumen. a) Calcule las densidades de carga en la coraza interior y en la coraza exterior. b) Calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en términos de  $q$  y de la distancia  $r$  respecto al centro común de las dos corazas con i)  $r < a$ ; ii)  $a < r < b$ ; iii)  $b < r < c$ ; iv)  $c < r < d$ ; v)  $r > d$ . Muestre sus resultados en una gráfica de la componente radial de  $\vec{E}$  en función de  $r$ .

**22.45** El cable coaxial. Un cable coaxial largo se compone de un conductor cilíndrico interior de radio  $a$  y un cilindro coaxial exterior de radio interior  $b$  y radio exterior  $c$ . El cilindro exterior está montado sobre soportes aislantes y no tiene carga neta. El cilindro interior tiene una carga positiva uniforme en cada unidad de longitud  $\lambda$ . Calcule el campo eléctrico a) en cualquier punto entre los cilindros, a una distancia  $r$  del eje; b) en cualquier punto afuera del cilindro exterior. c) Grafique la magnitud del campo eléctrico en función de la distancia  $r$  respecto al eje del cable, de  $r = 0$  a  $r = 2c$ . d) Halle la carga en cada unidad de longitud de la superficie interna y en la superficie externa del cilindro exterior.

**22.46** Un tubo conductor muy largo (cilindro hueco) tiene un radio interior  $a$  y un radio exterior  $b$ . Tiene una carga en cada unidad de longitud  $+\alpha$ , donde  $\alpha$  es una constante positiva con unidades de C/m. Una línea con carga yace a lo largo del eje del tubo. La línea con carga tiene una carga por unidad de longitud  $+\alpha$ . a) Calcule el campo eléctrico

en términos de  $\alpha$  y la distancia  $r$  respecto al eje del tubo con i)  $r < a$ ; ii)  $a < r < b$ ; iii)  $r > b$ . Muestre sus resultados en una gráfica de  $E$  en función de  $r$ . b) ¿Cuál es la carga en cada unidad de longitud en i) la superficie interna del tubo, ii) la superficie externa del tubo?

**22.47** Repita el problema 22.46, pero ahora el tubo conductor tendrá una carga en cada unidad de longitud  $-\alpha$ . Al igual que en el problema 22.46, la línea con carga tiene una carga por unidad de longitud  $+\alpha$ .

**22.48** Un cilindro sólido muy largo de radio  $R$  tiene una carga positiva uniformemente distribuida en él, con una carga en cada unidad de volumen  $\rho$ . a) Deduzca la expresión del campo eléctrico en el interior del volumen, a una distancia  $r$  del eje del cilindro, en términos de la densidad de carga  $\rho$ . b) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado afuera del volumen, en términos de la carga en cada unidad de longitud  $\lambda$  del cilindro? c) Compare las respuestas a los incisos (a) y (b) con  $r = R$ . d) Grafique la magnitud del campo eléctrico en función de  $r$  desde  $r = 0$  a  $r = 3R$ .

**22.49** Una sola placa conductora grande y aislada (Fig. 22.40) tiene una carga en cada unidad de área  $\sigma$  en su superficie. Ya que la placa es un conductor, el campo eléctrico en su superficie es perpendicular a la superficie y su magnitud es  $E = \sigma/\epsilon_0$ . a) En el ejemplo 22.7 (sección 22.4) se demostró que la magnitud del campo producido por una lámina grande con carga uniforme y con una carga en cada unidad de área  $\sigma$  es  $E = \sigma/2\epsilon_0$ , exactamente la mitad que una placa conductora con carga. ¿Por qué hay una diferencia? b) Si se considera la distribución de carga de la placa conductora como equivalente a dos láminas de carga (una en cada superficie), cada una con una carga en cada unidad de área  $\sigma$ , utilice el resultado del ejemplo 22.7 y el principio de superposición para demostrar que  $E = 0$  adentro de la placa y  $E = \sigma/\epsilon_0$  afuera de ella.

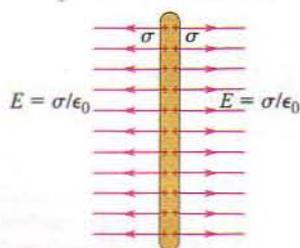


Figura 22.40 Problema 22.49.

**22.50** Modelo de Thomson del átomo. En los primeros años del siglo XX, uno de los modelos más destacados de la estructura del átomo era el del físico inglés J. J. Thomson (el descubridor del electrón). En el modelo de Thomson, un átomo consistía en una esfera de material con carga positiva en la que estaban incrustados electrones con carga negativa, como chispas de chocolate en una bola de masa de galleta. Considere un átomo como ése, compuesto de un electrón de masa  $m$  y carga  $-e$ , que se puede considerar como una carga puntual, y una esfera con carga uniforme de carga  $+e$  y radio  $R$ . a) Explique por qué la posición de equilibrio del electrón está en el centro del núcleo. b) En el modelo de Thomson se supuso que el material positivo ofrecía poca o ninguna resistencia al movimiento del electrón. Si el electrón se desplaza respecto al equilibrio una distancia menor que  $R$ , demuestre que el movimiento resultante del electrón será armónico simple, y calcule la frecuencia de oscilación. (Sugerencia: Repase la definición de movimiento armónico simple en la sección 13.2 del volumen I. Si se puede demostrar que la fuerza neta sobre el electrón es de esta forma, entonces se sigue que el movimiento es armónico simple. A la inversa, si la fuerza neta sobre el electrón no sigue esta forma, el movimiento no es armónico simple). c) En la época de Thomson ya se sabía que los átomos excitados emiten ondas luminosas de sólo ciertas frecuencias. En este modelo, la frecuencia de la luz emitida es la misma que la frecuencia de oscilación del electrón o electrones en el átomo. ¿Cuál ten-

dría que ser el radio de un átomo del modelo de Thomson para que produjese luz roja con una frecuencia de  $4.57 \times 10^{14}$  Hz? Compare su respuesta con los radios de los átomos reales, que son del orden de  $10^{-10}$  m (véanse los datos acerca del electrón en el apéndice F). d) Si se desplazara respecto al equilibrio una distancia mayor que  $R$ , ¿oscilaría el electrón? ¿Sería su movimiento armónico simple? Explique su razonamiento. (Nota histórica: En 1910 se descubrió el núcleo atómico, con lo cual se probó que el modelo de Thomson es incorrecto. La carga positiva de un átomo no está distribuida en todo su volumen como Thomson supuso, sino que está concentrada en el minúsculo núcleo, con un radio de  $10^{-14}$  a  $10^{-15}$  m).

**22.51 Modelo de Thomson del átomo (continuación).** Con base en el modelo (obsoleto) de Thomson del átomo descrito en el problema 22.50, considere un átomo compuesto de dos electrones, cada uno con carga  $-e$ , incrustados en una esfera de carga  $+2e$  y radio  $R$ . En el equilibrio, cada electrón está a una distancia  $d$  del centro del átomo (Fig. 22.41). Halle la distancia  $d$  en términos de las otras propiedades del átomo.

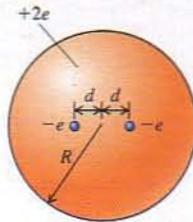


Figura 22.41 Problema 22.51.

**22.52 Campo eléctrico dentro de un átomo de hidrógeno.** Un átomo de hidrógeno se compone de un protón con carga  $+Q = 1.60 \times 10^{-19}$  C y un electrón con carga  $-Q = -1.60 \times 10^{-19}$  C. Se puede considerar el protón como una carga puntual en  $r = 0$ , el centro del átomo. El movimiento del electrón provoca que su carga esté “difusa” en una distribución esférica en torno al protón, por lo que el electrón es equivalente a una carga en la unidad de volumen de

$$\rho(r) = -\frac{Q}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

donde  $a_0 = 5.29 \times 10^{-11}$  m es lo que se conoce como *radio de Bohr*. a) Halle la cantidad total de la carga del átomo de hidrógeno que está encerrada dentro de una esfera de radio  $r$  centrada en el protón. Demuestre que, cuando  $r \rightarrow \infty$ , la carga encerrada tiende a cero. Explique este resultado. b) Halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) producido por la carga del átomo de hidrógeno en función de  $r$ . c) Grafique la magnitud del campo eléctrico  $E$  en función de  $r$ .

**22.53 Exploración de núcleos atómicos mediante dispersión de electrones.** A fin de estudiar la estructura del núcleo de plomo, se disparan electrones (carga  $-e = 1.60 \times 10^{-19}$  C, masa  $9.11 \times 10^{-31}$  kg) hacia un blanco de plomo. Algunos de los electrones penetran efectivamente en los núcleos del blanco, y se mide la desviación de estos electrones. La desviación se debe a la carga del núcleo, que está distribuida de modo aproximadamente uniforme en todo el volumen esférico del núcleo. La carga de un núcleo de plomo es de  $+82e$ , y su radio es  $R = 7.1 \times 10^{-15}$  m. Halle la aceleración de un electrón a las distancias siguientes del centro de un núcleo de calcio: a)  $2R$ ; b)  $R$ ; c)  $R/2$ ; d) cero (en el centro).

**22.54 Una placa con carga uniforme.** Una placa de material aislante tiene un espesor  $2d$  y está orientada de modo que sus caras son paralelas al plano  $yz$ , y están dadas por los planos  $x = d$  y  $x = -d$ . Las dimensiones  $y$  y  $z$  de la placa son muy grandes en comparación con  $d$ , y se pueden tratar como prácticamente infinitas. La placa tiene una densidad uniforme de carga positiva  $\rho$ . a) Explique por qué el campo eléctrico debido a la placa es cero en el centro de ésta ( $x = 0$ ). b) Con base en la ley de Gauss, halle el campo eléctrico

debido a la placa (magnitud y dirección) en todos los puntos del espacio.

**22.55 Placa con carga no uniforme.** Repita el problema 22.54, pero esta vez suponga que la densidad de carga de la placa está dada por  $\rho(x) = \rho_0(x/d)^2$ , donde  $\rho_0$  es una constante positiva.

**22.56 ¿Pueden las fuerzas eléctricas crear un equilibrio estable por sí solas?** En el capítulo 21 se expusieron varios ejemplos del cálculo de la fuerza ejercida sobre una carga puntual por otras cargas puntuales de su entorno. a) Considere una carga positiva puntual  $+q$ . Dé un ejemplo de cómo colocaría otras dos cargas puntuales de su elección a fin de que la fuerza neta sobre la carga  $+q$  sea cero. b) Si la fuerza neta sobre la carga  $+q$  es cero, entonces esa carga está en equilibrio. El equilibrio será *estable* si, cuando la carga  $+q$  se desplaza levemente en *cualquier* dirección respecto a su posición de equilibrio, la fuerza neta sobre la carga la empuja de regreso hacia la posición de equilibrio. Para que esto sea así, ¿cuál debe ser la dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$  debido a las otras cargas en los puntos alrededor de la posición de equilibrio de  $+q$ ? c) Imagine que la carga  $+q$  de desplaza muy lejos, y además una superficie gaussiana pequeña centrada en la posición donde  $+q$  estaba en equilibrio. Aplicando la ley de Gauss a esta superficie, demuestre que es *imposible* satisfacer la condición de estabilidad descrita en el inciso (b). En otras palabras, la carga  $+q$  no puede ser mantenida en un equilibrio estable por fuerzas electrostáticas exclusivamente. Este resultado se conoce como el *teorema de Earnshaw*. d) Los incisos del (a) al (c) se refieren al equilibrio de una carga puntual positiva  $+q$ . Pruebe que el teorema de Earnshaw también es aplicable a una carga puntual negativa  $-q$ .

**22.57** Una distribución de carga no uniforme, pero esféricamente simétrica, tiene una densidad de carga  $\rho(r)$  que es como sigue:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho_0(1 - r/R) & \text{para } r \leq R \\ \rho(r) &= 0 & \text{para } r \geq R \end{aligned}$$

donde  $\rho_0 = 3Q/\pi R^3$  es una constante positiva. a) Demuestre que la carga total contenida en la distribución es  $Q$ . b) Demuestre que el campo eléctrico en la región  $r \geq R$  es idéntico al que produce una carga puntual  $Q$  en  $r = 0$ . c) Obtenga una expresión del campo eléctrico en la región  $r \leq R$ . d) Grafique la magnitud del campo eléctrico  $E$  en función de  $r$ . e) Halle el valor de  $r$  en el que el campo eléctrico es máximo, y encuentre el valor de ese campo máximo.

**22.58** Una distribución de carga no uniforme, pero esféricamente simétrica, tiene una densidad de carga  $\rho(r)$  que es como sigue:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \rho_0(1 - 4r/3R) & \text{para } r \leq R \\ \rho(r) &= 0 & \text{para } r \geq R \end{aligned}$$

donde  $\rho_0$  es una constante positiva. a) Halle la carga total contenida en la distribución de carga. b) Obtenga una expresión del campo eléctrico en la región  $r \geq R$ . c) Obtenga una expresión del campo eléctrico en la región  $r \leq R$ . d) Grafique la magnitud del campo eléctrico  $E$  en función de  $r$ . e) Halle el valor de  $r$  en el que el campo eléctrico es máximo, y encuentre el valor de ese campo máximo.

**22.59 Ley de Gauss para la gravitación.** La fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales separadas por una distancia  $r$  es proporcional a  $1/r^2$ , al igual que la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales. Debido a esta semejanza entre las interacciones gravitatorias y eléctricas, existe también una ley de Gauss de la gravitación. a) Sea  $\vec{g}$  la aceleración debida a la gravedad provocada por una masa puntual  $m$  situada en el origen, de modo que  $\vec{g} = -(Gm/r^2)\hat{r}$ . Considere una superficie gaussiana esférica de radio  $r$  centrada en esta

masa puntual, y demuestre que el flujo de  $\vec{g}$  a través de esta superficie está dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi Gm$$

b) Siguiendo los mismos pasos lógicos utilizados en la sección 22.3 para obtener la ley de Gauss del campo eléctrico, demuestre que el flujo de  $\vec{g}$  a través de cualquier superficie cerrada está dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi Gm_{\text{enc}}$$

donde  $M_{\text{enc}}$  es la masa total encerrada dentro de la superficie cerrada.

**22.60 Aplicación de la ley de Gauss para la gravitación.** Con base en la ley de Gauss para la gravitación (deducida en el inciso (b) del problema 22.59), demuestre que los enunciados siguientes son verdaderos: a) Con respecto a cualquier distribución de masa esféricamente simétrica con una masa total  $M$ , la aceleración debida a la gravedad afuera de la distribución es la misma que si toda la masa estuviese concentrada en el centro. (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 22.5 en la sección 22.4). b) En cualquier punto del interior de una coraza de masa esféricamente simétrica, la aceleración debida a la gravedad es cero. (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 22.5). c) Si se pudiera taladrar un agujero a través de un planeta esféricamente simétrico hasta su centro, y si la densidad fuese uniforme, se encontraría que la magnitud de  $\vec{g}$  es directamente proporcional a la distancia  $r$  respecto al centro. (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 22.9 en la sección 22.4). Probamos estos resultados en la sección 12.6 mediante algunos análisis bastante laboriosos; las pruebas con base en la ley de Gauss para la gravitación son *mucho más fáciles*.

**22.61 a)** Una esfera aislante de radio  $a$  tiene una densidad de carga uniforme  $\rho$ . La esfera no está centrada en el origen, sino en  $\vec{r} = \vec{b}$ . Demuestre que el campo eléctrico en el interior de la esfera está dado por  $\vec{E} = \rho(\vec{r} - \vec{b})/3\epsilon_0$ . **b)** Una esfera aislante de radio  $R$  tiene un hueco esférico de radio  $a$  situado dentro de su volumen y centrado a una distancia  $b$  del centro de la esfera, donde  $a < b < R$  (en la figura 22.42 se muestra un corte transversal de la esfera). La parte sólida de la esfera tiene una densidad volumétrica de carga uniforme  $\rho$ . Halle la



Figura 22.42 Problema 22.61.

magnitud y dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$  en el interior del hueco, y demuestre que  $\vec{E}$  es uniforme en todo el hueco. (*Sugerencia:* Utilice el principio de superposición y el resultado del inciso (a)).

**22.62** En un cilindro sólido aislante, muy largo y de radio  $R$ , se ha taladrado un hueco cilíndrico de radio  $a$  a todo lo largo del cilindro. El eje del hueco está a una distancia  $b$  del eje del cilindro, donde  $a < b < R$  (Fig. 22.43). El material sólido del cilindro tiene una densidad volumétrica de carga uniforme  $\rho$ . Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$  en el interior del hueco, y demuestre que  $\vec{E}$  es uniforme en todo el hueco. (*Sugerencia:* Véase el problema 22.61).



Figura 22.43 Problema 22.62.

**22.63** Una carga positiva  $Q$  está distribuida uniformemente en cada uno de los dos volúmenes esféricos de radio  $R$ . Una esfera de carga está centrada en el origen, y la otra, en  $x = 2R$  (Fig. 22.44). Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico neto debido a estas dos distribuciones de carga en los puntos siguientes sobre el eje de las  $x$ : a)  $x = 0$ ; b)  $x = R/2$ ; c)  $x = R$ ; d)  $x = 3R$ .

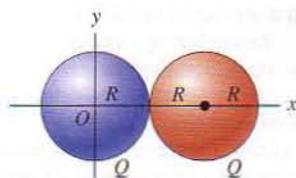


Figura 22.44 Problemas 22.63 y 22.64.

**22.64** Repita el problema 22.63, pero ahora con una carga positiva  $Q$  en la esfera de la izquierda y una carga negativa  $-Q$  en la esfera de la derecha.

### Problemas de desafío

**22.65** Cierta región del espacio contiene una carga positiva total  $Q$ , distribuida esféricamente de modo que la densidad volumétrica de carga  $\rho(r)$  está dada por

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \alpha && \text{con } r \leq R/2 \\ \rho(r) &= 2\alpha(1 - r/R) && \text{con } R/2 \leq r \leq R \\ \rho(r) &= 0 && \text{con } r \geq R \end{aligned}$$

En este caso  $\alpha$  es una constante positiva con unidades de  $C/m^3$ . a) Halle  $\alpha$  en términos de  $Q$  y  $R$ . b) Con base en la ley de Gauss, deduzca una expresión de la magnitud de  $\vec{E}$  en función de  $r$ . Haga esto por separado con respecto a las tres regiones. Expresé sus respuestas en términos de la carga total  $Q$ . No olvide verificar que sus resultados concuerden con los límites de las regiones. c) ¿Qué fracción de la carga total se encuentra dentro de la región  $r \leq R/2$ ? d) Si un electrón de carga  $q' = -e$  oscila hacia delante y hacia atrás con respecto a  $r = 0$  (el centro de la distribución) con una amplitud menor que  $2R$ , demuestre que el movimiento es armónico simple. (*Sugerencia:* Repase la exposición sobre el movimiento armónico simple en la sección 13.2 del vol. 1. Si, y sólo si, la fuerza neta sobre el electrón es proporcional a su desplazamiento respecto al equilibrio, entonces el movimiento es armónico simple.) e) ¿Cuál es el periodo del movimiento del inciso (d)? f) Si la amplitud del movimiento descrito en el inciso (e) es mayor que  $R/2$ , ¿sigue siendo el movimiento armónico simple? ¿Por qué?

**22.66** Cierta región del espacio contiene una carga positiva total  $Q$ , distribuida esféricamente de modo que la densidad volumétrica de carga  $\rho(r)$  está dada por

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 3\alpha r/(2R) && \text{con } r \leq R/2 \\ \rho(r) &= \alpha[1 - (r/R)^2] && \text{con } R/2 \leq r \leq R \\ \rho(r) &= 0 && \text{con } r \geq R \end{aligned}$$

En este caso  $\alpha$  es una constante positiva con unidades de  $C/m^3$ . a) Halle  $\alpha$  en términos de  $Q$  y  $R$ . b) Con base en la ley de Gauss, deduzca una expresión de la magnitud del campo eléctrico en función de  $r$ . Haga esto por separado con respecto a las tres regiones. Expresé sus respuestas en términos de la carga total  $Q$ . c) ¿Qué fracción de la carga total se encuentra dentro de la región  $R/2 \leq r \leq R$ ? d) ¿Cuál es la magnitud de  $\vec{E}$  en  $r = R/2$ ? e) Si un electrón en reposo con carga  $q' = -e$  se deja libre en cualquier punto de cualesquiera de las tres regiones, el movimiento resultante será oscilatorio, pero no armónico simple. ¿Por qué? (Véase el problema de desafío 22.65).